Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР Б. В. БУЛГАКОВ

ДЕЛЕНИЕ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ МАТРИЦ

§ 1. Общие правила. *Для того чтобы матрица c делилась справа на матрицу b, необходимо и достаточно, чтобы c имела столько же столбцов, связанных теми же линейными соотношениями, что и b;* кроме того, возможны и другие соотношения между этими столбцами.

В самом деле, пусть ранг матрицы b есть r; если в ее левом верхнем углу не стоит неособая квадратная субматрица r-го порядка, то этого можно достичь путем перестановки строк и столбцов:

$$ubv = \begin{Vmatrix} \beta & \beta l \\ \eta & \eta l \end{Vmatrix} (p \times q); \tag{1}$$

здесь $u(p \times p)$, $v(q \times q)$, $\beta(r \times r)$, $\eta(p - r \times r)$, $l(r \times q - r)$ — матрицы указанных в скобках типов, причем первые три — неособые*.

Искомые правые частные $a = c / b$ должны удовлетворять уравнению

$$ab = c. \tag{2}$$

Если же представить a / u, cv в форме

$$a / u = \| \alpha, \xi \| \quad (m \times p),$$

$$cv = \| \gamma, \zeta \| \quad (m \times q),$$

где $\alpha(m \times r)$, $\xi(m \times p - r)$, $\gamma(m \times r)$, $\zeta(m \times q - r)$ — субматрицы, то

$$\| \alpha, \xi \| \times \begin{Vmatrix} \beta & \beta l \\ \eta & \eta l \end{Vmatrix} = \| \gamma, \zeta \|.$$

Отсюда

$$\alpha\beta + \xi\eta = \gamma, \quad (\alpha\beta + \xi\eta) l = \zeta,$$

$$\alpha = (\gamma - \xi\eta) / \beta, \quad \zeta = \gamma l$$

и

$$c / b = \| (\gamma - \xi\eta) / \beta, \xi \| u \quad (m \times p), \tag{3}$$

$$cv = \| \gamma, \gamma l \| \quad (m \times q). \tag{4}$$

Последнее соотношение доказывает теорему, а предыдущее представляет формулу для искомых правых частных. Матрица ξ остается

* Матричная терминология и символика, применяемые здесь и в дальнейшем, либо общеприняты, либо соответствуют ([1]).

неопределенной, так что частное содержит $m(p-r)$ произвольных скаляров.

Для того чтобы матрица c делилась слева на матрицу a, необходимо и достаточно, чтобы c имела столько же строк, связанных теми же линейными соотношениями, что и a; кроме того, возможны и другие соотношения между этими строками.

В самом деле, переставляя строки и столбцы a так, чтобы в верхнем левом углу стояла неособая квадратная субматрица порядка, равного рангу r, имеем

$$uav = \begin{Vmatrix} \alpha & \xi \\ k\alpha & k\xi \end{Vmatrix} \quad (m \times n). \tag{5}$$

Искомые левые частные $b = a \setminus c$ должны удовлетворять уравнению (2). Если же представить $v \setminus b$, uc в форме

$$v \setminus b = \begin{Vmatrix} \beta \\ \eta \end{Vmatrix} \quad (n \times q), \qquad uc = \begin{Vmatrix} \gamma \\ \zeta \end{Vmatrix} \quad (m \times q),$$

то, после такого же вычисления, как в предыдущем доказательстве найдем:

$$a \setminus c = v \begin{Vmatrix} \alpha \setminus (\gamma - \xi\eta) \\ \eta \end{Vmatrix} \quad (n \times q), \tag{6}$$

$$uc = \begin{Vmatrix} \gamma \\ k\gamma \end{Vmatrix} \quad (m \times q). \tag{7}$$

Формула для $a \setminus c$ содержит неопределенную матрицу η, состоящую из $q(n-r)$ произвольных элементов.

§ 2. Обратные матрицы. Две следующие теоремы являются следствиями предыдущих.

Для того чтобы матрица b допускала левые обратные E / b, необходимо и достаточно, чтобы она была квадратной или укороченной и неособой справа, т. е. чтобы ее ранг равнялся числу ее столбцов.

При этом условии, переставляя, если нужно, строки, имеем

$$ub = \begin{Vmatrix} \beta \\ \eta \end{Vmatrix} \quad (n \times m), \tag{8}$$

где $\beta(m \times m)$ — неособая субматрица. Левые обратные будут квадратными или удлиненными:

$$E_m \setminus b = \| (E_m - \xi\eta) \setminus \beta, \xi \| u \quad (m \times n). \tag{9}$$

Для того чтобы матрица a допускала правые обратные $a \setminus E$, необходимо и достаточно, чтобы она была квадратной или удлиненной и неособой слева, т. е. чтобы ее ранг равнялся числу ее строк.

При этом условии, переставляя столбцы, имеем

$$av = \| \alpha, \xi \| \quad (m \times n), \tag{10}$$

где $\alpha(m \times m)$—неособая субматрица. Правые обратные будут квадратными или укороченными:

$$a \setminus E_m = v \begin{Vmatrix} \alpha \setminus (E_m - \xi\eta) \\ \eta \end{Vmatrix} \quad (n \times m). \tag{11}$$

Если b допускает левые обратные E / b, то

$$c(E / b) = c / b;$$

однако не всякое c / b может быть получено по этой формуле, вследствие чего выражение $c(E / b)$ вообще нельзя смешивать с c / b; аналогичным образом обстоит дело для правых обратных.

§ 3. Делители нуля. Так как нулевая матрица надлежащего типа всегда удовлетворяет условиям теорем § 1, то, при заданной матрице b, приводимой к виду (1), все левые делители нуля $a = 0_{mq} / b$, удовлетворяющие уравнению $ab = 0_{mq}$, заключены в формуле

$$0_{mq} / b = \| -\xi\eta / \beta, \xi \| u \quad (m \times p). \tag{12}$$

Если же задана матрица $a(m \times n)$, приводимая к виду (5), то все правые делители нуля $a \backslash 0_{mq}$ заключены в формуле

$$a \backslash 0_{mq} = v \left\| \begin{matrix} \alpha \backslash (-\xi\eta) \\ \eta \end{matrix} \right\| \quad (n \times q). \tag{13}$$

Институт механики
Академии наук СССР

Поступило
26 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. В. Булгаков, Колебания, 1, гл. 1, М. — Л., 1949.