Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

В. БОЛТЯНСКИЙ

СЕКУЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 23 IV 1952)

Пусть P — косое произведение [1], базой которого является комплекс B, а слоем — многообразие C, допускающее транзитивную компактную группу Ли Γ преобразований [2], которая и входит в определение косого произведения (как группа гомеоморфизмов слоя). Это означает, что каждой точке $a \in B$ соответствует некоторое подмножество (слой) $C_a \subset P$, гомеоморфное C, причем если a и b — различные точки из B, то C_a и C_b не пересекаются; кроме того, если T — симплекс комплекса B и a — точка симплекса T, то определено гомеоморфное отображение $\xi_{T,a}$ многообразия C на C_a, непрерывно зависящее от $a \in T$; наконец, если a — общая точка симплексов T и T', то $\xi_{T,a}^{-1} \cdot \xi_{T',a}$ есть элемент группы Γ, непрерывно зависящий от $a \in T \cap T'$. Если $T = a$ есть вершина комплекса B, то соответствующее отображение $\xi_{T,a}$ мы будем также обозначать через $\xi_{a,a}$.

Мы будем предполагать, что слой C связен и что его гомотопические группы $\pi^1(C), \ldots, \pi^{r-1}(C)$ тривиальны, где r — натуральное число. При $r = 1$ предполагается дополнительно, что фундаментальная группа $\pi^1(C)$ коммутативна и все ее элементы являются тождественными операторами группы $\pi^2(C)$ [3]. Группы $G_1 = \pi^r(C)$ и $G_2 = \pi^{r+1}(C)$ имеют конечное число образующих [3,4]. Множество всех тех элементов γ группы Γ, которые оставляют на месте некоторую точку q многообразия C, т. е. удовлетворяют соотношению $\gamma(q) = q$, есть подгруппа группы Γ — стабильная подгруппа; обозначим ее через Γ_1. Мы предположим, что группа Γ_1 связна (при $r > 1$ это следует из тривиальности группы $\pi^1(C)$). Группа. Γ_1 является группой Ли [2]; ее фундаментальная группа коммутативна [2] и имеет конечное число образующих. В дальнейшем группы G_1, G_2 и $G_3 = \pi^1(\Gamma_1)$ будут областями коэффициентов групп ∇-гомологий.

Мы скажем, что над множеством $A \subset B$ (мы будем также говорить: на множестве A) задана (в косом произведении P) секущая поверхность $\mathfrak{S}$, если в каждом слое C_a, $a \in A$, выбрана точка $\mathfrak{S}(a)$, непрерывно (в смысле топологии в P) зависящая от a. Символом B^s будет обозначаться s-мерный остов комплекса B. В настоящей заметке даются условия возможности построения секущей поверхности на B^{r+2}.

Прежде всего опишем условия возможности построения секущей поверхности над B^{r+1} (они аналогичны штифелевским [5]). Над B^r секущую поверхность построить всегда возможно. В самом деле, если над B^s секущая поверхность $\mathfrak{S}$ построена, то попытка распространения ее над $(s+1)$-мерным ориентированным симплексом T комплекса B приводит к построению отображения границы этого симплекса в C; это отображение определяет элемент группы $\pi^s(C)$, который ставится в соответствие симплексу T. Получается ∇-цикл $z^{s+1}(\mathfrak{S})$ по области коэффициентов $\pi^s(C)$ — препятствие к распространению секущей поверхности $\mathfrak{S}$ на остов B^{s+1}. Для возможности этого распространения необходимо и достаточно, чтобы было $z^{s+1}(\mathfrak{S})=0$. Построив теперь над B^0 секущую поверхность произвольно, мы сможем последовательно продолжить ее над $B^1, B^2, \ldots, B^r$ в силу связности C и тривиальности групп $\pi^s(C)$ (и, значит, циклов $z^{s+1}(\mathfrak{S})$) для $s<r$. Таким образом, первое возможное нетривиальное препятствие есть цикл $z^{r+1}(\mathfrak{S})$ по группе G_1. Класс гомологий Y^{r+1} этого цикла является инвариантом данного косого произведения. Равенство $Y^{r+1}=0$ является необходимым и достаточным условием для возможности построения секущей поверхности над остовом B^{r+1} (условие, аналогичное данному Штифелем).

Для возможности построения секущей поверхности над B^{r+2}, очевидно, необходимо, чтобы было $Y^{r+1}=0$. В дальнейшем это условие предполагается выполненным. Для секущей поверхности $\mathfrak{S}$, заданной над B^{r+1}, определен цикл $z^{r+2}(\mathfrak{S})$ по группе G_2, который назовем **вторым препятствием** для секущей поверхности $\mathfrak{S}$. Вторые препятствия секущих поверхностей целиком заполняют один или несколько классов $(r+2)$-мерных ∇-гомологий комплекса B по группе G_2. Для возможности построения секущей поверхности над B^{r+2} необходимо и достаточно, чтобы среди этих классов ∇-гомологий находился нулевой класс. Таким образом, задача сводится к алгебраическому описанию всех классов гомологий, заполняемых вторыми препятствиями.

Группа Γ является косым произведением с базой C и слоем Γ_1 [6]; группой преобразований слоя является Γ_1. При этом, если a — произвольная точка многообразия C, то слой $(\Gamma_1)_a$ состоит из всех $\gamma\in\Gamma$, удовлетворяющих условию $\gamma(q)=a$, и является левым смежным классом группы Γ по подгруппе Γ_1.

Лемма. *Пусть над подкомплексом K комплекса B задана секущая поверхность $\mathfrak{S}$ и пусть T — симплекс из K. Тогда можно построить такое отображение φ симплекса T в Γ, что, обозначая через φ_a образ точки $a\in T$ при этом отображении, будем иметь:*

$$\xi_{T,a}(\varphi_a(q))=\mathfrak{S}(a).$$

Доказательство. Поставим в соответствие точке $a\in T$ точку $f(a)=\xi_{T,a}^{-1}(\mathfrak{S}(a))$. Тогда f есть непрерывное отображение симплекса T в C, а так как C есть база косого произведения Γ (см. выше), то [7] возникает новое косое произведение с базой T и слоем Γ_1. Каждый слой $(\Gamma_1)_a$ этого косого произведения состоит из пар (γ, a), где $\gamma\in\Gamma$, причем $\gamma(q)=f(a)$. В этом косом произведении можно построить секущую поверхность (над всем T, ибо T — симплекс), т. е. поставить в соответствие каждой точке $a\in T$ такой непрерывно зависящий от $a\in T$ элемент $\varphi_a\in\Gamma$, что $\varphi_a(q)=f(a)$, или, что то же самое, $\xi_{T,a}(\varphi_a(q))=$ $=\mathfrak{S}(a)$, ч. т. д.

Пусть теперь задана секущая поверхность $\mathfrak{S}$ над B^{r+1}. Если a — вершина комплекса B, то выберем такой элемент $\eta_a\in\Gamma$, что $\xi_{a,a}(\eta_a(q))=\mathfrak{S}(a)$. Выберем такие элементы η_a для каждой вершины комплекса B. Пусть теперь T — одномерный симплекс комплекса B; b и c — его вершины. Выберем отображение φ симплекса T в Γ, указанное в лемме, т. е. удовлетворяющее условию $\xi_{T,a}(\varphi_a(q))=\mathfrak{S}(a)$. Тогда $(\xi_{T,b}\varphi_b)^{-1}\xi_{b,b}\eta_b\in\Gamma_1$ и $(\xi_{T,c}\varphi_c)^{-1}\xi_{c,c}\eta_c\in\Gamma_1$. В силу связности группы Γ_1 можно построить такое отображение δ отрезка T в Γ_1, что, обозначая через δ_a образ точки $a\in T$ при этом отображении, будем иметь $\delta_b=(\xi_{T,b}\varphi_b)^{-1}\xi_{b,b}\eta_b$ и $\delta_c=(\xi_{T,c}\varphi_c)^{-1}\xi_{c,c}\eta_c$. Рассмотрим отображение $\vartheta_a=\xi_{T,a}\varphi_a\delta_a$ $(a\in T)$ слоя C на C_a. Нетрудно видеть, что ϑ_a непрерывно зависит от

$a \in T$, что $\vartheta_b = \xi_{b,b}\gamma_{|b}$, $\vartheta_c = \xi_{c,c}\gamma_{|c}$ и что $\vartheta_a(q) = \mathfrak{S}(a)$. Проделав это построение для всех одномерных симплексов комплекса B, мы определим ϑ_a для всех $a \in B^1$. Пусть, наконец, T — двумерный симплекс комплекса B. Выберем (по лемме) такое отображение φ симплекса T в Γ, что для любой точки $a \in T$ имеет $\xi_{T,a}(\varphi_a(q)) = \mathfrak{S}(a)$. Рассмотрим для любой точки a границы D двумерного симплекса T отображение $\vartheta_a^{-1}\xi_{T,a}\varphi_a$. Оно является элементом группы Γ_1 и непрерывно зависит от $a \in O$. Это непрерывное отображение границы O симплекса T в Γ_1 определяет элемент группы G_3, который мы поставим в соответствие симплексу T. Таким образом возникает двумерный ∇-цикл комплекса B по области коэффициентов G_3. Сам этот цикл зависит от случайностей выбора элементов нашего построения, но его класс гомологий $Y^2_{\mathfrak{S}}$ однозначно определяется секущей поверхностью $\mathfrak{S}$.

Определим теперь умножение элементов групп G_1 и G_3, при котором произведение будет лежать в G_2. Пусть E^r и E^2 — ориентированные элементы размерностей r и 2. Их ориентированные границы обозначим, соответственно, через S^{r-1}, S^1. Пусть μ — непрерывное отображение окружности S^1 в Γ_1, определяющее некоторый элемент g_3 группы G_3; положим $\mu_a = \mu(a)$, $a \in S^1$. Пусть, далее, ν — отображение элемента E^r в C, переводящее всю границу элемента E^r в точку q и определяющее сфероид класса $q_1 \in G_1$. Определим отображение λ ориентированной границы $S^{r-1} \times E^2 \cup E^r \times S^1$ элемента $E^r \times E^2$ в C. На $E^r \times S^1$ отображение λ зададим соотношением $\lambda(b \times a) = \mu_a(\nu(b))$, где $b \in E^r$, $a \in S^1$. Очевидно, что имеем: $\lambda(S^{r-1} \times S^1) = q$. На $S^{r-1} \times E^2$ отображение λ определим соотношением $\lambda(S^{r-1} \times E^2) = q$. Описанное отображение λ границы элемента $E^r \times E^2$ в C определяет некоторый элемент g_2 группы G_2, который однозначно определяется элементами g_1 и g_3. Его мы и примем за произведение элементов g_1 и g_3: $g_2 = g_1 \cdot g_3$. Определенное нами произведение билинейно: $g_1(g_3' + g_3'') = g_1 g_3' + g_1 g_3''$; $(g_1' + g_1'')\, g_3 = g_1' g_3 + g_1'' g_3$.

При помощи этого умножения мы сможем определить произведение Колмогорова — Александера $\cup$ для элементов групп $\nabla^r(B, G_1)$ и $\nabla^2(B, G_3)$; в частности будет определено произведение $D^r \cup Y^2_{\mathfrak{S}}$ любого элемента D^r группы $\nabla^r(B, G_1)$ и определенного выше класса гомологий $Y^2_{\mathfrak{S}} \in \nabla^2(B, G_3)$.

Пусть, наконец, f — непрерывное отображение комплекса B^r в C, имеющее с отображением всего B^r в точку q различающую заданного класса $D^r \in \nabla^r(B, G_1)$. Отображение f можно продолжить на B^{r+1}. Обозначим через $\rho^{r+2}(D^r)$ препятствие к продолжению этого отображения в отображение комплекса B^{r+2}, а через $R^{r+2}(D^r)$ — класс гомологий этого цикла. Класс гомологий $R^{r+2}(D^r)$ однозначно определяется классом D^r и вычислен в [8].

Теорема. *Все классы гомологий Z^{r+2}, заполняемые вторыми препятствиями секущих поверхностей, даются формулой:*

$$Z^{r+2} = Z^{r+2}_{\mathfrak{S}} + R^{r+2}(D^r) + D^r \cap Y^2_{\mathfrak{S}},$$

где $\mathfrak{S}$ — произвольно фиксированная секущая поверхность, заданная над B^{r+1}, $Z^{r+2}_{\mathfrak{S}}$ — класс гомологий ее второго препятствия, а D^r пробегает всю группу $\nabla^r(B, G_1)$. При $r > 2$ класс гомологий $Y^2_{\mathfrak{S}}$ не зависит от $\mathfrak{S}$ и является инвариантом косого произведения P, совокупность классов гомологий $R^{r+2}(D^r) + D^r \cup Y^2_{\mathfrak{S}}$ является подгруппой H группы $\nabla^{r+2}(B, G_2)$, и поэтому классы гомологий вторых препятствий заполняют некоторый смежный класс по подгруппе H.

Краткое доказательство этой теоремы в частном случае векторных полей на многообразии приведено в моей заметке ([9]); в общем случае доказательство проводится по той же схеме. Из формулированной теоремы легко следуют результаты Хопфа ([10]) о полях двумерных касательных элементов на четырехмерном ориентированном многообразии.

Поступило
17 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, ДАН, **47**, № 4, 246 (1945). [2] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М.—Л., 1938. [3] В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, **1**, 5—6 (15—16), 175 (1946). [4] Л. С. Понтрягин, Изв. АН СССР, сер. матем., **14**, 1, 7 (1950). [5] E. Stiefel, Comm. Math. Helv., **8**, 305 (1936). [6] N. E. Steenrod, Ann. of Math., **45** (2), 294 (1944). [7] H. Whitney, Proc. Nat. Acad., **26**, 2, 148 (1940). [8] М. М. Постников, ДАН, **71**, № 6, 1027 (1950). [9] В. Болтянский, ДАН, **80**, № 3, 305 (1951). [10] H. Hopf, Colloque Intern. de Topologie Alg., Paris, 1947.