Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 28 IV 1952)

1. Через $\widetilde{C}$ мы обозначим пространство всех непрерывных 2π-периодических функций $f(x)$ с нормой $\|f\|_{\widetilde{C}} = \max\limits_{0\leqslant x<2\pi} |f(x)|$. Положим $f_t(x) = f(x+t)$.

Будем говорить, что $U(f, x)$ есть линейная тригонометрическая полиномиальная операция порядка n типа Φ (коротко: л.т.п.о. n/Φ), если $U(f, x)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $U(f, x)$ есть линейный оператор, переводящий $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$; 2) для любой $f \in \widetilde{C}$ $U(f, x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n; 3) для любого тригонометрического полинома $T(x)$ порядка не выше n справедливо равенство

$$U(T, x) = \int\limits_0^{2\pi} T(x+t)\,\Phi(t)\,dt = \sigma_n(T, x) \tag{1}$$

где $\Phi(t)$ — заданный тригонометрический полином порядка n*.

Приведем различные примеры л.т.п.о.

А. Пусть задана конечная последовательность вещественных или комплексных чисел

$$\rho_0,\ \rho_1, \ldots, \rho_n. \tag{$\mathfrak{M}$}$$

Для любой $f \in \widetilde{C}$ построим с помощью последовательности $(\mathfrak{M})$ тригонометрический полином

$$\sigma_x(f, x) = \sum_{j=0}^{n} \rho_j S_j(f, x) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+t)\, D_n^{(\mathfrak{M})}(t)\,dt, \tag{2}$$

где $S_j(f, x)$ есть частная сумма ряда Фурье $f(x)$, а $D_n^{(\mathfrak{M})}(t)$ — обобщенное ядро Дирихле метода суммирования $(\mathfrak{M})$.

Определим теперь линейную операцию $U(f, x)$ из $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$ следующим образом:

1) для всякой $f \in \widetilde{C}$ $U(f, x)$ есть полином порядка не выше n;

2) для любого полинома $T(x)$ порядка не выше n

$$U(T, x) = \sigma_n(T^{(k)}, x), \tag{3}$$

где $T^{(k)}$ есть производная порядка k от $T(x)$.

Очевидно, что построенный оператор является частным случаем**

* Это определение л.т.п.о. n/Φ предложено С. М. Лозинским.

** Заметим, что определения л.т.п.о. из работ ([2,3]) являются частными случаями операции пункта А, когда $k = 0$.

л.т.п.о. n/Φ. Если $\rho_j=0$ при $j<n$ и $\rho_n=1$, то равенство (3) принимает вид:

$$U(T, x)=T^{(k)}(x). \tag{4}$$

Б. Примерами л.п.т.о., обладающих свойством (4), могут служить следующие операции;

$$U(f, x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)\, D_n^{(k)}(t)\, dt;$$

$$U(f, x)=L_n^{(k)}(f, x)=\sum_{j=1}^{2n+1} f(x_j)\,[l_j(x)]^{(k)},$$

где $D_n(t)$ — ядро Дирихле; $L_n^{(k)}(f, x)$ есть k-я производная от интерполяционного полинома Лагранжа, построенного для произвольной системы узлов; $\{l_k(x)\}_{k=1}^{2n+1}$ — фундаментальные полиномы Лагранжа системы узлов.

2. Простейшей л.т.п.о. n/Φ является операция из правой части равенства (1). Оказывается, что можно установить простую связь между произвольной л.т.п.о. n/Φ и операцией (1).

Теорема 1. *Пусть $f\in\tilde{C}$ и $U(f, x)$ — произвольная л.т.п.о. n/Φ, переводящая $\tilde{C}$ в $\tilde{C}$.*

Тогда имеет место равенство

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f_t, x-t)\, dt=\int_0^{2\pi} f(x+t)\,\Phi(t)\, dt=\sigma_n(f, x). \tag{5}$$

Для доказательства теоремы 1 нам нужны следующие леммы:

Лемма 1. *Пусть $A(f, x)$ — произвольный линейный оператор, переводящий $\tilde{C}$ в $\tilde{C}$.*

Тогда для любой $\varphi\in\tilde{C}$ справедливо равенство

$$A\left[\int_0^{2\pi}\varphi(x+t)\, e^{ikt}\, dt\right]=\int_0^{2\pi} A\,[\varphi(x+t)]\, e^{ikt}\, dt,$$

где k — любое целое число.

Лемма 2. *Пусть $U(f, x)$ — произвольная линейная операция, переводящая всякую $f\in\tilde{C}$ в тригонометрический полином порядка $\leqslant n$.*

Тогда

$$B_n=\int_0^{2\pi} U\,[f_t(x)-S_n(f_t(x)),\ x-t]\, dt=0.$$

Доказательство теоремы 1. Из линейности $U(f, x)$ следует, что левая часть (5) равна

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,[S_n(f_t(x)),\ x-t]\, dt+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U\,[f_t(x)-S_n(f_t(x)),\ x-t]\, dt=A_n+B_n. \tag{6}$$

Согласно лемме 2,

$$B_n=0. \tag{7}$$

Так как $S_n(f_t(x))$ — полином порядка $\leqslant n$, то из определения л.т.п.о. n/Φ следует, что

$$U[S_n(f_t(x))] = \int_0^{2\pi} S_n(f_t(x),\ x+t_1)\,\Phi(t_1)\,dt_1.$$

Хорошо известно, что

$$S_n(f_t(x),\ x+t_1) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_t(x+t_1+t_2)\,D_n(t_2)\,dt_2.$$

Поэтому

$$U[S_n(f_t(x)),\ x-t] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(t_1)\,dt_1\int_0^{2\pi} f(x+t_1+t_2)\,D_n(t_2)\,dt_2.$$

Следовательно,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} D_n(t_2)\,dt_2\int_0^{2\pi} f(x+t_1+t_2)\,\Phi(t_1)\,dt_1. \tag{8}$$

Заметим, что $\sigma_n(f, x)$ есть полином порядка не выше n. Поэтому, из свойства частных сумм ряда Фурье и из (8), вытекает, что

$$A_n = \sigma_n(f, x). \tag{9}$$

Из (6), (7), (9) следует теорема 1.

Следствие. Пусть $f \in \widetilde{C}$ и $U(f, x)$ — произвольная л.т.п.о., переводящая $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$ и удовлетворяющая условию (4).

Тогда справедлива формула:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f_t,\ x-t)\,dt = S_n^{(k)}(f, x). \tag{10}$$

Частный случай (10), когда $U(f, x)$ есть тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа и $k=0$, был установлен И. Марцинкевичем [1].

Теорема 1 оказывается полезной во многих исследованиях. В частности, мы воспользуемся ею для оценки нормы л.т.п.о. n/Φ.

Теорема 2. *Пусть $U(f, x)$ — произвольная л.т.п.о. n/Φ, переводящая $\widetilde{C}$ в $\widetilde{C}$.*

Тогда

$$\|U\|_{\widetilde{C}} \geqslant \|\sigma_n\|_{\widetilde{C}}.$$

Доказательство. Полагаем в (5) $x=0$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(f_t, -t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,\Phi(t)\,dt;$$

значит,

$$\|U\|_{\widetilde{C}} \geqslant \sup_{\|f\|_{\widetilde{C}}\leqslant 1}\left|\int_0^{2\pi} f(t)\,\Phi(t)\,dt\right|. \tag{11}$$

Но правая часть (11) есть $\|\sigma_n\|_{\widetilde{C}}$.

В частности, из теоремы 2 для операций пункта А следует неравенство:

$$\|U\|_{\widetilde{C}} \geqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |[D_n^{(\mathfrak{M})}(t)]^{(k)}|\,dt = L_n^{(\mathfrak{M})}. \tag{12}$$

Если $U(f, x)$ обладает свойством (4), то из (12) следует, что

$$\| U \|_{\widetilde{C}} \geqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} | D_n^{(k)}(t) | \, dt \simeq \frac{4}{\pi^2} n^k \ln n + O(n^k). \tag{13}$$

В частности, применяя (13) к оператору $L_n^{(k)}(f, x)$, мы получим, что для любой системы узлов интерполирования

$$\max_x \sum_{j=1}^{2n+1} | l_j^{(k)}(x) | \geqslant \frac{4}{\pi^2} n^k \ln n + O(n^k).$$

3. Аналогичные результаты имеют место для пространства $\widetilde{L}$ всех суммируемых 2π-периодических функций с нормой

$$\| f \|_{\widetilde{L}} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} | f(t) | \, dt.$$

Теорема 3. *Пусть $U(f, x)$ — произвольная л.т.п.о. n / Φ, переводящая $\widetilde{L}$ в $\widetilde{L}$.*

Тогда для любой $f \in \widetilde{L}$ справедлива формула (5).

Из теоремы 3, в частности, вытекает:

Теорема 4. *Пусть $U(f, x)$ — произвольная л.т.п.о. n / Φ, переводящая $\widetilde{L}$ в $\widetilde{L}$.*

Тогда

$$\| U \|_{\widetilde{L}} \geqslant \| \sigma_n \|_{\widetilde{L}}. \tag{14}$$

Для оператора A неравенство (14) принимает вид:

$$\| U \|_{\widetilde{L}} \geqslant L_n^{(\mathfrak{M})}. \tag{15}$$

Применяя (15) к оператору $L_n^{(k)}(f, x)$, мы получим, что

$$\sum_{j=1}^{2n+1} \int_0^{2\pi} | [l_j(x)]^{(k)} | \, dx \geqslant \frac{8}{\pi} n^k \ln n + O(n^k). \tag{16}$$

Частные случаи неравенств (13), (15), (16) находятся в работах С. М. Лозинского ([2-4]).

Изложенные результаты без особого труда распространяются на многомерный случай и пространства Орлича ([5]).

Аналогичные результаты имеют место для линейных полиномиальных операций, переводящих функции данного пространства в алгебраические полиномы степени не выше n.

Поступило
11 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] I. Marcinkiewicz, Acta Szeged., **8**, 127 (1937). [2] С. М. Лозинский, ДАН, **64**, № 4 (1949). [3] С. М. Лозинский, ДАН, **61**, № 2 (1948). [4] С. М. Лозинский, ДАН, **50**, № 6 (1945). [5] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939.