Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

С. В. ВАЛЛАНДЕР

ПРОТЕКАНИЕ ЖИДКОСТИ В ТУРБИНЕ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 27 III 1952)

В настоящей работе мы рассмотрим задачу о построении потока жидкости в турбине в целом. Жидкость будем предполагать идеальной и несжимаемой и абсолютный поток в турбине будем считать безвихревым. Для определенности рассмотрения будем исходить из схемы гидротурбины, изображенной на рис. 1.

Из дальнейшего будет видно, что основной результат работы без труда распространяется и на другие конструкции машин подобного рода.

1. Через цилиндрическое сечение AA' (рис. 1) жидкость поступает в турбину, затем проходит через направляющий аппарат, состоящий из лопастей $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots, B_n$, и поступает на вращающееся рабочее колесо, состоящее из лопастей $C_1, C_2, \ldots, C_l$, укрепленных на втулке рабочего колеса. Через сечение DD' жидкость выходит из турбины.

Очевидно, что поток в турбине является трехмерным и неустановившимся и что его точное построение является задачей большой трудности. Поэтому в настоящее время принято расчленять эту сложную задачу на ряд более простых задач. Считают, что в направляющем аппарате жидкость движется в горизонтальных плоскостях, а в камере рабочего колеса движется вертикально, цилиндрическими слоями.

При такой схематизации построение потока в направляющем аппарате сводится к построению потока в радиальной решетке, центр которой моделируется вихреисточником, а построение потока около рабочего колеса сводится к построению потока около плоской бесконечной решетки профилей.

Описанное расчленение задачи обладает несомненными достоинствами, заключающимися в весьма существенном упрощении задачи, но, наряду с достоинствами, и существенными недостатками. При таком расчленении задачи совершенно игнорируются геометрия подвода и отвода жидкости, существование и форма втулок и камеры рабочего колеса, совершенно исключается возможность учета взаимного влияния направляющего аппарата и рабочего колеса и т. д.

Поэтому желательна разработка такой схемы построения потока в турбине, которая была бы свободна от отмеченных недостатков и, в то же время, сохраняла математические достоинства общеупотребительной схемы. Этому и посвящена работа.

2. Возьмем какую-либо окружность C, лежащую в горизонтальной плоскости и имеющую центр на оси турбины. Построим поверхность тока F, проходящую через C, и сформулируем первое основное допущение: поверхность тока F для любой окружности C является поверхностью вращения вокруг оси турбины и не зависит от времени.

Фиксируем какую-либо окружность C и выведем дифференциальные уравнения движения жидкости по поверхности F, соответствующей выбранной окружности C.

По семейству поверхностей вращения $\{F\}$ всегда можем построить ортогональное к $\{F\}$ семейство поверхностей вращения $\{G\}$ с той же осью. К семействам $\{F\}$ и $\{G\}$ присоединим семейство полуплоскостей $\{H\}$, проходящих через ось турбины. Получим триортогональную систему поверхностей, которая определит систему ортогональных координат q_1, q_2, ϑ.

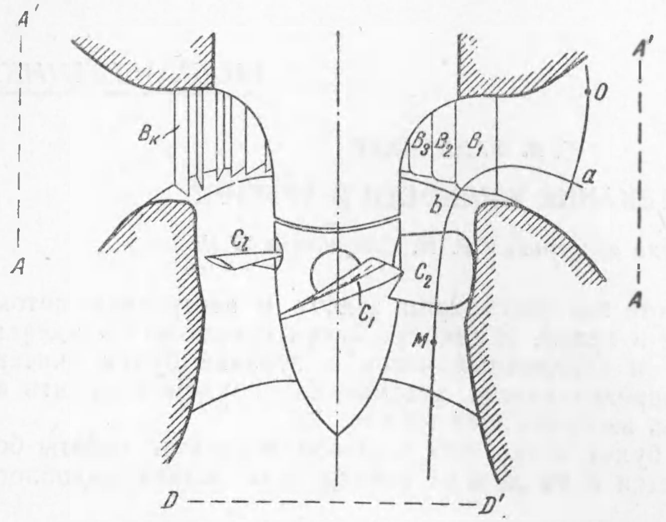

Рис. 1

Будем иметь:

$$x = A(q_1,\ q_2)\cos\vartheta,$$

$$y = A(q_1,\ q_2)\sin\vartheta,$$

$$z = B(q_1,\ q_2);$$

$$H_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial q_1}\right)^2},\quad H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial B}{\partial q_2}\right)^2},\quad H_3 = A, \tag{1}$$

где x, y, z — декартовы координаты; H_1, H_2, H_3 — коэффициенты Ламе; A и B — некоторые функции q_1, q_2 (поверхности $\{F\}$ имеют уравнения $q_1 = \text{const}$, а поверхности $\{G\}$ имеют уравнение $q_2 = \text{const}$).

Возьмем уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3v_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1v_2) + \frac{\partial}{\partial\vartheta}(H_1H_2v_3) = 0. \tag{2}$$

Так как $\{F\}$ — поверхности тока, то $v_1 \equiv 0$, и уравнение неразрывности приобретает вид:

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3H_1v_2) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}(H_1H_2v_3) = 0. \tag{3}$$

Присоединим к (3) условие отсутствия вихря, взятое в проекции на ось q_1. Будем иметь:

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(H_3v_3) - \frac{\partial}{\partial\vartheta}(H_2v_2) = 0. \tag{4}$$

В уравнения (3) и (4) координата q_1 входит как параметр, и на данной поверхности F коэффициенты уравнений зависят только от q_2.

Считая, что q_1 фиксировано, введем в (3) и (4) вместо q_2 координату ξ по формуле

$$\xi = \int\frac{H_2}{H_3}\,dq_2, \tag{5}$$

а вместо компонент скорости v_2 и v_3 — величины Q_ξ и Q_ϑ по формулам:

$$Q_\xi = H_3v_2,\quad Q_\vartheta = H_3v_3. \tag{6}$$

Тогда из (3) и (4) получим:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial Q_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \xi} Q_\xi = 0, \\
\frac{\partial Q_\xi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial Q_\vartheta}{\partial \xi} = 0.
\end{gathered} \tag{7}
$$

Конкретизируем теперь выбор криволинейных координат q_1, q_2 и сформулируем второе основное допущение.

Рассмотрим какое-либо осевое сечение турбины (рис. 1) и предположим, что мы изучаем движение жидкости на такой поверхности $\{F\}$, которая в сечении изображается кривой abM. Выберем в сечении фиксированную точку O и проведем через нее поверхность G, которая пусть изображается кривой aO. Будем считать криволинейной координатой q_1 точки M длину дуги Oa, а криволинейной координатой q_2 будем считать длину дуги S кривой abM, отсчитанную от a до M.

Положим, что $r = R(S)$ есть уравнение кривой abM. Тогда на рассматриваемой поверхности F будем иметь:

$$
H_1 = \frac{\delta(S)}{\delta(0)} = \frac{\delta(\xi)}{\delta(0)}, \quad H_2 = 1,
$$

$$
H_3 = R(S), \quad \xi = \int_0^S \frac{dS}{R(S)},
$$

где $\delta(S) = \delta(\xi)$ — расстояние между рассматриваемой поверхностью F и бесконечно близкой к ней поверхностью того же семейства.

Допустим, что величина $\delta(\xi)$ является медленно меняющейся функцией координаты ξ (хотя, быть может, и испытывает не малые относительные изменения). Тогда H_1 будет медленно меняющейся функцией координаты ξ.

Предположим, что логарифмическая производная от $H_1(\xi)$ по переменной ξ пренебрежимо мала по сравнению с единицей. Тогда в первом из уравнений (7) можно отбросить третий член. Получим систему уравнений:

$$
\frac{\partial Q_\xi}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_\vartheta}{\partial \vartheta} = 0, \quad \frac{\partial Q_\xi}{\partial \vartheta} - \frac{\partial Q_\vartheta}{\partial \xi} = 0. \tag{8}
$$

Уравнения (8) будут точными, если $\delta(\xi) = \delta(0)$. Это будет, например, иметь место при движении жидкости параллельными плоскими слоями (радиальная решетка) и при движении жидкости цилиндрическими слоями (цилиндрическая решетка).

Из (8) следует существование функций Φ и Ψ, связанных с Q_ξ и Q_ϑ соотношениями

$$
Q_\xi = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \vartheta}, \quad Q_\vartheta = \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \tag{9}
$$

причем сами Φ и Ψ, очевидно, связаны между собой уравнениями Коши — Римана и могут отыскиваться при помощи методов комплексного переменного с использованием конформных преобразований.

3. Поставим краевую задачу для функций Φ и Ψ в плоскости (ξ, ϑ). В этой плоскости направляющий аппарат дает неподвижную бесконечную решетку профилей l_k с осью решетки, параллельной оси ϑ, а рабочее колесо дает подвижную бесконечную решетку профилей m_k с

той же осью и перемещающуюся вдоль оси ϑ со скоростью ω, где ω — угловая скорость вращения рабочего колеса.

На бесконечности будем иметь

$$Q_\xi |_{\xi=-\infty} = Q_\xi |_{\xi=+\infty} = \frac{Q_0}{2\pi}, \quad Q_\vartheta |_{\xi=-\infty} = 0, \tag{10}$$

где Q_0 — поверхностный расход жидкости через турбину, вычисленный для рассматриваемой поверхности F.

На контурах l_k и m_k будем иметь условия обтекания, которые имеют вид:

$$\left[v_3 = v_2 \frac{d\vartheta}{d\xi}\right]_{l_k}, \quad \left[v_3 - \omega R = v_2 \frac{d\vartheta}{d\xi}\right]_{m_k}. \tag{11}$$

Подставляя в (11) выражения v_2 и v_3 через Φ и Ψ, получим

$$[d\Psi = 0]_{l_k}, \quad [d\Psi = -\omega R^2 d\xi]_{m_k}$$

или

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0\right]_{l_k}, \quad \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \omega R^2 \cos(\widehat{n, \vartheta})\right]_{m_k}, \tag{12}$$

где $\bar{n}$ — нормаль к контурам l_k и m_k.

В задних острых кромках профилей должно быть поставлено условие конечности величин Q_ξ и Q_ϑ. Из сказанного видим, что для функций Φ и Ψ имеем обычные для теории решеток задачи Дирихле и Неймана.

4. Найдя Φ и Ψ, будем иметь скорости движения жидкости. По скоростям движения сможем восстановить потенциал скоростей, и тогда найдем давление при помощи интеграла Лагранжа.

Если не интересоваться давлениями в данный момент и говорить о средних давлениях, то восстановление потенциала скоростей φ производить не нужно. Действительно, при подходящем определении φ на бесконечности φ, v и p не зависят от времени. Поэтому интеграл Лагранжа имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} - gz = \text{const}. \tag{13}$$

Кроме того, потенциал скоростей φ в неподвижной точке (q_1, ξ, ϑ) является периодической функцией времени с периодом $T = 2\pi / N\omega$, где N — число лопастей рабочего колеса.

Поэтому, осредняя (13) по времени за период T, получим:

$$\frac{\overline{v^2}}{2} + \frac{\bar{p}}{\rho} - gz = \text{const}, \tag{14}$$

где $\overline{v^2}$ и $\bar{p}$ — средние значения квадрата скорости и давления.

При нахождении $\bar{p}$ из (14) нужно знать только величину $\overline{v^2}$, которая найдется, если будут известны Φ и Ψ для всех взаимных положений решеток в течение периода T.

Если рассматривать подвижные точки, перемещающиеся со скоростью ω вдоль оси ϑ (например точки профилей m_k), то потенциал φ будет периодической функцией времени с периодом $T_1 = 2\pi / N_1\omega$, где N_1 — число лопастей направляющего аппарата. В этом случае уравнение, аналогичное (14), получим в результате осреднения по периоду T_1.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
22 III 1952