Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 1

МАТЕМАТИКА

Ю. М. БЕРЕЗАНСКИЙ

О ТЕОРИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СДВИГА В ГИПЕРКОМПЛЕКСНЫХ СИСТЕМАХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 3 V 1952)

Основной теоремой общей теории почти периодических функций относительно обобщенного сдвига, развитой в работах Б. М. Левитана ([1, 2]), а также автора ([3]), является равенство Парсеваля. В этих работах равенство Парсеваля доказывается в классической форме лишь при условии невырожденности среднего M, т. е. тогда, когда из равенства $M[|f(t)|^2]=0$ для почти периодической функции $f(t)$ вытекает, что $f(t)\equiv 0$. Однако прямая проверка этого условия, даже если оно выполняется, в большинстве случаев оказывается невозможной. В этой заметке доказывается равенство Парсеваля в классической форме при сравнительно просто проверяемых ограничениях, налагаемых не на весь класс почти периодических функций, а лишь на систему характеров гиперкомплексной системы. В качестве непосредственного следствия общей теории мы получаем окончательное обобщение на коммутативные локально компактные группы теоремы Б. М. Левитана о четных почти периодических функциях.

Теория почти периодических функций строится относительно сдвига в гиперкомплексной системе с локально компактным базисом, поэтому предварительно мы рассмотрим свойства таких систем (ср. ([4, 5])).

1°. Пусть Q — локально компактное метрическое пространство, через (Q) обозначим тело его борелевских множеств, имеющих компактное замыкание. Функцию $C(A, B, t)$ $(A, B\in(Q);\ t\in Q)$ будем называть структурной мерой (с. мерой), если: α) при фиксированных B и t (A и t) она является абсолютно аддитивной регулярной мерой относительно A (B); β) $C(A, B, t)$ непрерывна по t при фиксированных A и B; γ) для каждых $A, B, D\in(Q)$ и $t\in Q$ справедливо равенство

$$\int C(A, B, r)\, d_r C(E_r, D, t)=\int C(B, D, r)\, d_r C(A, E_r, t),$$

причем интегралы сходятся абсолютно (ассоциативность); δ) для каждых $A, B\in(Q)$ и $t\in Q$ $C(A, B, t)=C(B, A, t)$ (коммутативность). По заданной с. мере определим композицию функций равенством

$$(x*y)(t)=\int x(r)\, d_r\int y(s)\, d_s C(E_r, E_s, t). \tag{1}$$

Мы будем предполагать, что существует такая мера $dm(t)=dt$, что композиция (1) непрерывна относительно нормы $\|x\|=\int|x(t)|\,dt$; в этом случае пространство $L_1(Q_m)$, построенное по мере dt, будет коммутативным нормированным кольцом (вообще говоря, без единицы), это кольцо мы и называем гиперкомплексной системой (г. с.) с базисом Q. Кольцо с формально присоединенной единицей будем обозначать через $\mathfrak{L}_1(Q_m)$.

Максимальные идеалы кольца $L_1(Q_m)$ (или $\mathfrak{L}_1(Q_m)$, если в $L_1(Q_m)$ нет единицы, в этом случае речь идет о максимальных идеалах, отличных от $L_1(Q_m)$) задаются соответствием

$$x(t) \to x(M) = \int x(t)\, \chi(t)\, dt,$$

где $\chi(t)$ — некоторая в существенном ограниченная единицей функция, которую будем называть характером г. с.

Пусть $A, B, D \in (Q)$, положим $C(A, B, D) = \int\limits_D C(A, B, t)\, dt$. Г. с. назовем нормальной, если существует гомеоморфизм $t \to t^*$ пространства Q такой, что $(t^*)^* = t$, $C(A, B, D) = C(D, B^*, A)$, $m(A^*) = m(A)$ $(A, B, D \in (Q);\ t \in Q)$, причем с. мера вещественна. Нормальную г. с. назовем эрмитовой, если $t = t^*$ $(t \in Q)$. В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно нормальные г. с., удовлетворяющие дополнительному условию аннуляции с. меры при больших t: для любых компактов $A, B \subset Q$ найдется столь большой компакт $F \subset Q$, что $C(E_1, E_2, t) = 0$ при $E_1 \subset A$, $E_2 \subset B$ и $t \overline{\in} F$.

Отметим ряд свойств подобных г. с.

1. Если $L_1(Q_m)$ содержит единицу, то базис Q состоит из счетного числа дискретных точек.

2. Характеры г. с. непрерывны.

3*. Радикал кольца $\mathfrak{L}_1(Q_m)$ состоит из тех и только тех элементов $u \in L_1(Q_m)$, для которых $u * x = 0$ при любом $x \in L_1(Q_m)$.

Будем говорить, что нормальная г. с. обладает базисной единицей (б. е.), если в базисе Q существует такая точка o, что для любых $A, B \in (Q)$ $C(A, B, o) = m(A^* \cap B)$.

4. Для того чтобы точка $o \in Q$ была б. е., необходимо и достаточно, чтобы система характеров была полна в классе ограниченных функций на Q, аннулирующихся вне компакта, и чтобы $\chi(o) = 1$ для каждого характера.

5. В г. с. с б. е. отсутствует радикал.

2°. Пусть $x(t)$ $(t \in Q)$ в существенном ограниченная функция; будем называть оператором сдвига в г. с. оператор, определяемый равенством:

$$(T_r x)(s) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{m[U_n(r)]\, m[U_n(s)]} \int C[U_n(r),\ U_n(s),\ t]\, x(t)\, dt, \tag{2}$$

где $U_n(t) \subset Q$ обозначает сферу радиуса $1/n$ с центром в точке t. Можно показать, что предел (2) существует почти для всех $(r, s) \in Q \times Q$ относительно квадрата меры m. Будем предполагать, что для непрерывных ограниченных $x(t)$ предел (2) существует для всех (r, s) и является непрерывной функцией на $Q \times Q$, причем $(T_0 x)(s) = x(s)$, если в г. с. имеется б. е. o.

Ограниченную непрерывную функцию $f(t)$ $(t \in Q)$ назовем почти периодической (п. п.), если семейство функций $(T_r f)(s)$ ($r \in Q$ параметр, $s \in Q$ переменное) компактно относительно равномерной сходимости.

Легко видеть, что характерами г. с. служат такие и только такие непрерывные ограниченные функции $\chi(t)$, которые удовлетворяют соотношению $(T_r \chi)(s) = \chi(r)\, \chi(s)$ $(r, s \in Q)$. Отсюда вытекает, что каждый характер является п. п. функцией. Характеры будут играть роль элементарных п. п. функций.

Однородный аддитивный положительный функционал M, определенный на пространстве $C(Q)$ всех ограниченных непрерывных

---

* Это утверждение обобщает и уточняет теорему 5 (4).

функций на Q, будем называть средним, если: 1) $\underset{t}{M}[(T_{t*}x)(r)y(t)] = \underset{t}{M}[x(t)(T_{t*}y)(r)]$ и 2) $\underset{t}{M}[|(T_t x)(r)|] \leqslant \underset{t}{M}[|x(t)|]$ $(x, y \in C(Q);\ r \in Q)$.

Очевидно, всегда можно предполагать, что $M[1] = 1$ и $\underset{t}{M}[x(t^*)] = \underset{t}{M}[x(t)]$ $(x \in C(Q))$. Если в г. с. существует характер $\chi_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$, то среднее единственно на п. п. функциях. Отметим, что не для всякой г. с. существует среднее. Но оно, например, будет существовать, если имеется возрастающая последовательность компактов $Q_1 \subset \ldots \subset Q_N \subset \ldots \ldots \to Q$, $Q_N^* = Q_N$ такая, что $\frac{1}{m(Q_N)} V(Q_N, Q \setminus Q_N, t) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$ для каждой $t \in Q$. Здесь $V(A, B, t)$ — вариация на «прямоугольнике» $A \times B$ меры $C(E_1 \times E_2, t) = C(E_1, E_2, t)$ на $Q \times Q$. В этом случае

$$\underset{t}{M}[x(t)] = \operatorname*{Lim}_{N\to\infty} \frac{1}{m(Q_N)} \int_{Q_N} x(t)\,dt \qquad (x \in C(Q)),$$

где Lim — предел Банаха.

Введем в линейную совокупность B всех п. п. функций скалярное произведение, полагая $(f, g) = M[f(t)\overline{g(t)}]$; гильбертово пространство, получаемое путем отождествления с нулем тех f, для которых $(f, f) = 0$, и последующего пополнения, обозначим через B_2. Легко показать, что каждый характер $\chi(t)$ г. с., для которого $(\chi, \chi) > 0$, эрмитов (т. е. $\chi(t^*) = \overline{\chi(t)}$), причем для любых двух неравных характеров $\chi_1(t)$ и $\chi_2(t)$ $(\chi_1, \chi_2) = 0$. Таким образом, характеры г. с., для которых $(\chi, \chi) > 0$, образуют ортогональную систему в B_2. Равенство Парсеваля для разложений по характерам может быть доказано в следующей обобщенной форме.

Теорема 1. *Для каждой п. п. функции f имеет место равенство*

$$(f, f) = (f_a, f_a) + \sum_{\chi} \frac{|(f, \chi)|^2}{(\chi, \chi)}, \tag{3}$$

где f_a — проекция элемента f на подпространство таких элементов $u \in B_2$, для которых $\underset{r}{M}[|\underset{t}{M}[(T_{t*}g)(r)u]|^2] = 0$ при всякой п. п. g.

Будем говорить, что равенство Парсеваля справедливо в классической форме, если в (3) член (f_a, f_a) отсутствует. В этом случае теорема аппроксимации может быть доказана в форме теоремы 3 ([3]).

3°. Интеграл вида $\int_S \chi(t)\,d\omega(\chi) = \alpha(t)$ $(t \in Q)$, где $d\omega$ — абсолютно аддитивная регулярная мера ограниченной вариации на пространстве S эрмитовых характеров г. с., назовем интегралом Фурье — Стильтьеса. Будем говорить, что выполнено условие Д, если произведение $\chi(t)\,\theta(t)$ любых двух эрмитовых характеров разлагается в интеграл Фурье — Стильтьеса с равномерно по $\chi, \theta \in S$ ограниченными вариациями мер. В г. с. с б. е. это условие будет, например, выполнено, если произведение любых двух эрмитовых характеров является положительно определенной (в г. с.) функцией. Выполнение Д означает, что по данной г. с. возможно построить ей двойственную (ср. ([5])).

Лемма. *Для каждого эрмитова характера $\theta(t)$ справедливо соотношение*

$$\underset{t}{M}\left[\int_S \chi(t)\,d\omega(\chi)\,\overline{\theta(t)}\right] = (\theta, \theta)\,\omega(\theta).$$

Если выполнено условие Д и существует характер $\chi_1(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$, то *дополнительно*

$$\underset{t}{M}\left[\int\limits_{S}|\chi(t)|^2\,d\omega(\chi)\right]=\int\limits_{S}(\chi,\chi)\,d\omega(\chi),\quad \underset{t}{M}\left[\left|\int\limits_{S}\chi(t)\,d\omega(\chi)\right|^2\right]=\sum_{\chi}(\chi,\chi)\,|\omega(\chi)|^2, \tag{4}$$

где суммирование распространено по всем $\chi \in S$, *для которых* $\omega(\chi)\neq 0$.

При помощи леммы может быть доказана основная теорема:

Теорема 2*. *Пусть в г. с. с б. е. существует характер* $\chi_1(t)\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 1$ *и выполнено условие Д. Если только* $(\chi,\chi)>0$ *для всех эрмитовых характеров, то равенство Парсеваля справедливо в классической форме.*

Замечание. Условие Д и существование $\chi_1(t)$ можно заменить требованием выполнения соотношений (4).

4°. Функцию $x(t)$ $(t\in Q)$ будем называть четной, если $x(t^*)=x(t)$. Совокупность всех четных функций из $L_1(Q_m)$ образует подкольцо (четную подсистему), которое можно рассматривать как эрмитову г. с., базисом которой служит совокупность $\mathbf{Q}$ пар (t, t^*). Оператор сдвига $\mathbf{T_r}$ в четной подсистеме имеет вид

$$(\mathbf{T_r}x)(\mathbf{s})={}^1/_2\left[(T_rx)(s)+(T_{r^*}x)(s)\right](r\in\mathbf{r},\ s\in\mathbf{s};\ \mathbf{r},\ \mathbf{s}\in\mathbf{Q}).$$

Если г. с. $L_1(Q_m)$ является симметрическим кольцом, то при помощи одной теоремы Г. Е. Шилова ([6]) можно показать, что каждый характер четной подсистемы имеет вид $\operatorname{Re}\chi(t)$, где $\chi(t)$ — некоторый характер г. с. $L_1(Q_m)$. На основании этого легко проверить, что выполнение условий теоремы 3 в исходной г. с. влечет их выполнение в четной подсистеме, откуда вытекает равенство Парсеваля в классической форме для четной подсистемы.

Применяя это замечание к групповому кольцу локально компактной коммутативной группы из теоремы аппроксимации (см. 2°), при помощи простого рассуждении (см. ([3]), теорема 4) получаем следующее обобщение на группы теоремы Б. М. Левитана о четных п. п. функциях на оси ([7], [8], [3]).

Теорема 3. *Пусть G — локально компактная со второй аксиомой счетности коммутативная группа. Для того чтобы некоторая четная непрерывная функция $f(t)$ на G была п. п. функцией, необходимо и достаточно, чтобы семейство*

$$^1/_2\left[f(s-r)+f(s+r)\right]\quad (s,\ r\in G) \tag{5}$$

было компактным относительно равномерной сходимости по s.

Следствие. *Для того чтобы некоторая непрерывная функция $f(t)$ на G была п. п. функцией, необходимо, а если $f(t)$ ограничена, то и достаточно, чтобы семейство* (5) *было компактным.*

Институт математики
Академии наук УССР

Поступило
6 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. М. Левитан, Матем. сборн., 7 (49), № 3 (1940). [2] Б. М. Левитан, там же, 16 (58), № 3 (1945). [3] Ю. М. Березанский, ДАН, 81, № 4 (1951). [4] Ю. М. Березанский и С. Г. Крейн, Укр. матем. журн., 3, № 2 (1951). [5] Ю. М. Березанский, ДАН, 81, № 3 (1951). [6] Г. Е. Шилов, ДАН, 29, № 2 (1940). [7] Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, 4, 1 (29) (1949). [8] В. А. Марченко, Зап. Ин-та матем. и мех. ХГУ и Харьковск. матем. об-ва, 20, сер. 4, 33 (1950).

* При доказательстве этой теоремы использовано одно замечание З. Л. Лейбензона.