

А. М. БЕНДЕРСКИЙ

**О РАСПРЕДЕЛЕНИИ МОДУЛЯ МАКСИМАЛЬНОГО ОТКЛОНЕНИЯ
ОТ СРЕДНЕГО В РЯДУ НАБЛЮДЕНИЙ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 V 1952)

Пусть z_1, z_2, \dots, z_n суть независимые измерения величины z , подчиняющейся нормальному распределению с плотностью вероятностей

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(z-a)^2/2\sigma^2}. \quad (1)$$

При обработке опытных данных важно определить вероятность неравенства

$$\max \left| \frac{z_i - \bar{z}}{S} \right| \geq \lambda, \quad (2)$$

где λ — любое наперед заданное положительное число, $z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i$ и $S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (z_i - \bar{z})^2}$. Обозначим $x_i = \frac{z_i - \bar{z}}{S}$. Как известно (1), величина x_i имеет распределение с плотностью вероятностей

$$\psi_n(x) = \frac{1}{V\pi(n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \left(1 - \frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} \quad (|x| < \sqrt{n-1}). \quad (3)$$

Расположим все x_i в возрастающем порядке

$$u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n. \quad (4)$$

Распределение величины u_n впервые было получено Н. В. Смирновым (2), показавшим, как построить функцию

$$F_n(\lambda) = P(u_n \geq \lambda) \quad (5)$$

в интервалах $\sqrt{\frac{n-k}{k}} \geq \lambda > \sqrt{\frac{n-k-1}{k+1}}$, $k = 1, 2, \dots, n-2$.

В первом интервале

$$F_n(\lambda) = \frac{n}{V\pi(n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{\lambda}^{V\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} dx; \quad (6)$$

во втором интервале

$$F_n(\lambda) = \frac{n}{V\pi(n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{\lambda}^{V\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} dx -$$

$$-\frac{n}{\pi} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)} \int_{\lambda}^{\sqrt{\frac{n-2}{2}}} \left(1 - \frac{x^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} dx \int_{\delta(x)}^{\sqrt{\frac{n-2}{2}}} \left(1 - \frac{\xi^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}} d\xi, \quad (7)$$

где $\delta(x) = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2/(n-1)}}$.

Аналогичный вид имеет распределение величины

$$F_1(\lambda) = P(x_1 \leq -\lambda). \quad (8)$$

Распределения величины (2) пока в литературе нет.

В настоящей заметке мы покажем, как получить функцию

$$F(\lambda) = P(\max |x| \geq \lambda). \quad (9)$$

Обозначим $y_i = |x_i|$ и построим новый вариационный ряд для y_i *:

$$v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_n. \quad (10)$$

Последние m членов ряда (10) могут получаться как i первых и k последних членов ряда (4), $0 \leq i \leq m$, $k = m - i$.

Можно показать, что

$$\text{в интервале } \sqrt{\frac{n}{2}} < \lambda \leq \sqrt{n-1} \quad P(v_{n-1} \geq \lambda) = 0; \quad (11)$$

$$\text{в интервале } \sqrt{\frac{n-3}{3-8/n}} < \lambda \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \quad P(v_{n-2} \geq \lambda) = 0. \quad (12)$$

Далее следует, что в интервале

$$\sqrt{\frac{n-2}{2}} < \lambda \leq \sqrt{\frac{n}{2}} \quad (13)$$

вероятность $P(v_{n-1} > \lambda) \neq 0$, только в том случае, если $i = k = 1$; в интервале

$$\sqrt{\frac{n-3}{3-8/n}} < \lambda \leq \sqrt{\frac{n-2}{2}} \quad (14)$$

вероятность $P(v_{n-1} \geq \lambda) \neq 0$, если: а) $i = k = 1$; б) $i = 0$, $k = 2$; в) $i = 2$, $k = 0$, причем условия а), б) и в) несовместны в интервале (14).

Подобные рассуждения можно продолжить, имея в виду, что границы интервалов вычисляются по формулам

$$\sqrt{\frac{n-k-i}{k+i-4ki/n}}, \quad \text{если } k \neq i; \quad \sqrt{\frac{n}{k+i}}, \quad \text{если } k = i. \quad (15)$$

Наконец, для вычисления вероятности $P(v_{n-1} \geq \lambda)$ при условии, что $v_n \geq \lambda$, существуют соотношения

$$\gamma(\tau) = \frac{n-2}{V(n-1)n} \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\tau^2}{n-1}}}, \quad \text{если } i \neq 0, k \neq 0; \quad (16)$$

$$\delta(\tau) = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \frac{\tau}{\sqrt{1-\frac{\tau^2}{n-1}}}, \quad \text{если } i = 0 \text{ или } k = 0. \quad (17)$$

Получаем для функции $F(\lambda) = P(v_n \geq \lambda)$: в интервале (11)

* Идея такого решения принадлежит А. Н. Колмогорову.

$$F(\lambda) = \frac{2n}{V\pi(n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{\lambda}^{V\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau; \quad (18)$$

в интервале (13)

$$F(\lambda) = \frac{2n}{V\pi(n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{\lambda}^{V\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau - \\ - \frac{2n}{\pi} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)} \int_{\lambda}^{V\sqrt{n/2}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau \int_{\gamma(\tau)}^{V\sqrt{n-2}} \left(1 - \frac{\xi^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}} d\xi; \quad (19)$$

в интервале (14)

$$F(\lambda) = \frac{2n}{V\pi(n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{\lambda}^{V\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau - \\ - \frac{2n}{\pi} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)} \left\{ \int_{\lambda}^{V\sqrt{n/2}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau \int_{\gamma(\tau)}^{V\sqrt{n-2}} \left(1 - \frac{\xi^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}} d\xi + \right. \\ \left. + \int_{\lambda}^{V\sqrt{(n-2)/2}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau \int_{\delta(\tau)}^{V\sqrt{n-2}} \left(1 - \frac{\eta^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}} d\eta \right\}. \quad (20)$$

Получающийся на первый взгляд сложный вид этой функции для малых вероятностей ($P \leq 0,1$) и не очень больших n ($n \leq 25$), с которыми обычно приходится встречаться на практике, значительно упрощается. В выражении (20) для небольших $F(\lambda)$ главным членом является 1-й; 2-й и 3-й малы по сравнению с ним. Оценим их влияние:

$$\frac{2n}{V\pi(n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{\lambda}^{V\sqrt{n-1}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau - \\ - \frac{2n}{\pi} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)} \int_{\lambda}^{V\sqrt{n/2}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau \int_{\gamma(\tau)}^{V\sqrt{n-2}} \left(1 - \frac{\xi^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}} d\xi - \\ - \frac{2n}{\pi} \sqrt{\frac{n-1}{n-2}} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)} \int_{\lambda}^{V\sqrt{(n-2)/2}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau \int_{\delta(\tau)}^{V\sqrt{n-2}} \left(1 - \frac{\eta^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}} d\eta =$$

$$= \frac{2n}{V \pi (n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) V^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)_{\lambda+\delta\lambda}} \int \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau. \quad (21)$$

Разлагая правую часть (21) в ряд по степеням $\delta\lambda$, сохраняя члены, содержащие первую степень $\delta\lambda$, и замечая, что

$$\begin{aligned} & \int_{\lambda}^{V^{n/2}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau \int_{\gamma(\tau)}^{V^{n-2}} \left(1 - \frac{\xi^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}} d\xi > \\ & > \int_{\lambda}^{V^{(n-2)/2}} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau \int_{\delta(\tau)}^{V^{n-2}} \left(1 - \frac{\eta^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}} d\eta, \end{aligned}$$

получим

$$|\delta\lambda| < \frac{\frac{2(n-1)}{V \pi (n-2)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right) V^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n-3}{2}\right)_{\lambda}} \int_{\lambda} \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau \int_{\gamma(\tau)}^{V^{n-2}} \left(1 - \frac{\xi^2}{n-2}\right)^{\frac{n-5}{2}} d\xi}{\left(1 - \frac{\theta^2 \lambda^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}}}, \quad (22)$$

$1 < \theta \sqrt{\frac{3n-8}{2(n-3)}}$. Применяя теорему о средней, будем иметь

$$|\delta\lambda| < 2(n-1) \int_{\lambda}^{V^{n/2}} B\left\{\frac{n-3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1 - \frac{2}{n} \tau^2}{1 - \frac{\tau^2}{n-1}}\right\} d\tau, \quad (23)$$

где $B\left\{\frac{n-3}{2}, \frac{1}{2}; \frac{1 - \frac{2}{n} \tau^2}{1 - \frac{\tau^2}{n-1}}\right\}$ — неполная бета-функция (4). Вычисление

(23) для $n=20$ и $\lambda = \sqrt{\frac{n(n-3)}{3n-8}}$ показывает, что $|\delta\lambda| < 0,0014$. Для $n < 20$ эта поправка будет еще меньше, так как соответствующие вероятностям, меньшим 10%, предельные значения $\lambda > \sqrt{\frac{n(n-3)}{3n-8}}$.

Отсюда ясно видно, что получающаяся от неучета второго и третьего членов в выражении (20) точность для практических целей вполне достаточна. Это значит, что для обработки опытных данных можно пользоваться приближенным выражением для распределения модуля максимального отклонения от среднего в ряду наблюдений.

$$F(\lambda) = \frac{2n}{V \pi (n-1)} \frac{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) V^{n-1}}{\Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)_{\lambda}} \int \left(1 - \frac{\tau^2}{n-1}\right)^{\frac{n-4}{2}} d\tau \quad (24)$$

и приведенной в (2,3) таблицей, удвоив при этом уровни значимости.

Поступило
11 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Г. Крамер, Математические методы статистики, 1948. ² Н. В. Смирнов, ДАН, 33, 346 (1941). ³ F. E. Grubbs, Ann. of Math. Statistics, 21, No. 1 (1950). ⁴ Tables of the Incomplete B-function.