Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

К. А. РОДОССКИЙ

О ЧИСЛЕ НУЛЕЙ ВСЕХ L-ФУНКЦИЙ С ХАРАКТЕРАМИ ПО ДАННОМУ МОДУЛЮ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 1 IV 1952)

В этой заметке автор дает новую теорему о числе нулей всех L-функций с характерами, принадлежащими достаточно большому модулю, вблизи прямой $\sigma = 1$ *.

Пусть $N(\Delta; -T, T; D)$ обозначает число нулей всех L-функций с характерами по модулю D, лежащих в прямоугольнике $\Delta \leqslant \sigma \leqslant 1$, $|t| \leqslant T$.

Теорема.

$$N(\Delta; -T, T; D) < c\,(DT)^{\frac{9}{2\Delta}(1-\Delta)} \ln^{12} DT,$$

где $0{,}9 \leqslant \Delta < 1$, $T \geqslant D^{1/2}$, $D \geqslant D_0$ (c, D_0 — *положительные абсолютные постоянные*).

Доказательство. Введем следующие обозначения: χ — неглавный характер $\bmod D$, χ_0 — главный характер $\bmod D$, $\rho = \beta + i\tau$ — нуль $L(s, \chi)$. $N_1(\Delta; T_1, T_2; D)$ обозначает число нулей всех $L(s, \chi)$ (исключая $L(s, \chi_0)$), лежащих в прямоугольнике $\Delta \leqslant \sigma \leqslant 1$, $T_1 \leqslant t \leqslant T_2$. Для доказательства теоремы достаточно оценить $N_1(\Delta; T_1, 2T_1; D)$ в случаях, когда $T_1 \geqslant D^2$ и $D^2 > T_1 \geqslant \exp({}^{11}/_{10} \ln\ln D + {}^{4}/_{3}(1-\Delta)\ln D)$ и еще оценить $N_1(\Delta; 0, T_1'; D)$ при $T_1' = \exp({}^{11}/_{10} \ln\ln D + {}^{4}/_{3}(1-\Delta)\ln D)$. В последнем случае нужная оценка сразу следует из теоремы автора (1), являющейся некоторым обобщением известного результата Ю. В. Линника (2).

Именно, $N_1(\Delta; 0, T_1'; D) \ll T_1'(D^2 T_1')^{\frac{3}{\Delta}(1-\Delta)} \ln^8 D \ll (DT)^{\frac{9}{2\Delta}(1-\Delta)} \ln^{12} DT$.

Переходим к оценке $N_1(\Delta; T_1, 2T_1; D)$. Используя приближенное функциональное уравнение для $L(s, \chi)$ в форме, данной Н. Г. Чудаковым (3) (которое с небольшим дополнением верно для любого неглавного характера), а также тождество (см. (4))

$$L(s, \chi) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant \alpha D} \chi(n)\, n^{-s} + O(\alpha^{1-\sigma} t^{-1}), \tag{1}$$

справедливое для неглавного характера по $\bmod D$ при ${}^{3}/_{4} \leqslant \sigma \leqslant 2$, $3 \leqslant t \leqslant \alpha$, мы получим оценку

$$\sum_{1 \leqslant m \leqslant y} m^{-\beta} \Big| \sum_{1 \leqslant n \leqslant z/m} \chi(n)\, n^{-\rho} \Big| < c_1 \big(D^{1/2} T_1^{1/2} y z^{-\beta} + D y z^{-\beta} +$$

$$+ T_1^{-1/2} z^{1-\beta} \ln z + D T_1^{1/3} y^2 z^{-1-\beta} + D^{\beta-1} T_1^{-1} z^{1-\beta} \ln z\big) = A,$$

* Символы $\gg$, O и o заменяют абсолютные положительные постоянные.

где $\rho=\beta+i\tau$ есть нуль, лежащий в прямоугольнике $\Delta\leqslant\beta<1$, $T_1\leqslant\tau\leqslant 2T_1$. Выбирая $y=DT_1$, $z=c_2(DT_1)^{\frac{3}{2\Delta}}$ в случае $T_1\geqslant D^2$ и $z=c_3D^{\frac{2}{\Delta}}T^{\frac{3}{2\Delta}}$ в случае $T_1<D^2$, мы получим $A\leqslant 1/2$. Подходящие постоянные c_2 и c_3 могут быть найдены при достаточно больших D.

Отсюда, так же как в ([1]), получаем:

$$\left|\sum_{y<n\leqslant z}\chi(n)\,n^{-\rho}a_n\right|\geqslant\frac{1}{2},\qquad a_n=\sum_{d/n,\ d>y}\mu(d). \tag{2}$$

Заметим, что неравенство (2) можно получить без помощи приближенного функционального уравнения и формулы (1), но с некоторым ухудшением окончательного результата. Каждому $\rho=\beta+i\tau$ ставим в соответствие какое-нибудь число ν, ближайшее целое к τ. Из (2) следует, что найдется число $\xi_\rho\in[y,z]$ такое, что

$$\sum_{y<n\leqslant\xi_\rho}\chi(n)\,a_n\,n^{-i\nu}\gg\xi_\rho^\beta\ln^{-1}z.$$

По способу, подробно изложенному в работе ([1]), мы находим число $\xi\in[y,z]$ такое, что для $N_2\gg N_1(\Delta;T_1,2T_1;D)\,\xi^{\Delta-1}\ln^{-3}z$ различных пар $\{\chi,\nu\}$ имеет место неравенство

$$\sum_{y<n\leqslant\xi}\chi(n)\,a_n n^{-i\nu}\gg\xi^{\Delta}\ln^{-1}z. \tag{3}$$

Множество различных пар $\{\chi,\nu\}$, для которых имеет место (3), назовем E. Из (3) следует

$$\sum_{\{\chi,\nu\}\in E}\left|\sum_{y<n\leqslant\xi}\chi(n)\,a_n n^{-i\nu}\right|^2\gg N_1(\Delta;T_1,2T_1;D)\,\xi^{3\Delta-1}\ln^{-5}z. \tag{4}$$

Берем теперь $\delta=(8[\ln z])^{-1}$ и оценим сумму ([3])

$$S=\sum_{T_1\delta^{-1}\leqslant\nu\leqslant 2T_1\delta^{-1}}\sum_{\chi}\left|\sum_{y<n\leqslant\xi}\chi(n)\,a_n\,n^{-i\delta\nu}\right|^2,$$

в которой суммирование распространяется на все характеры, включая главный:

$$S\ll D\ln z\Bigg[T_1\sum_{y<n\leqslant\xi}\tau(n)+\sum_{y<n\leqslant\xi}\tau(n)\,\chi_0(n)\sum_{\substack{n<m\leqslant\xi\\ m\equiv n\,(\mathrm{mod}\,D)}}|a_n|+$$
$$+\sum\sum_{\substack{y<n<m\leqslant\xi\\ m\equiv n\,(\mathrm{mod}\,D)}}\frac{\tau(n)\,\tau(m)\,n}{m-n}\Bigg].$$

При оценке среднего члена в правой части применяем лемму 1 (2) из ([1]) и получаем, в результате сравнения с (4), оценку

$$N_1(\Delta;T_1,2T_1;D)\ll DT_1\xi^{2-3\Delta}\ln^9 z+\xi^{3(1-\Delta)}\ln^{10}z.$$

Берем в самом невыгодном случае $\xi=z$. Мы получаем оценки, из которых легко следует теорема, так как прибавление нулей $L(s,\chi_0)$ не изменяет вида оценки.

Доказанная теорема находит применение к арифметическим проблемам, из которых укажем на наиболее простые. Именно, легко получается не только теорема о распределении простых чисел в коротких арифметических прогрессиях [5], но и теорема о распределении простых в отрезках таких прогрессий:

$$\psi(x+u, D, l) - \psi(x, D, l) = \frac{u}{\varphi(D)} - E(D)\,\frac{(x+u)^{\beta_1} - x^{\beta_1}}{\varphi(D)\,\beta_1}\,\chi_1(l) + o\left(\frac{u}{\varphi(D)}\right)$$

при $\ln x \gg \ln D \cdot \ln\ln D$ в $u \geqslant x^{\eta}$ (где $\eta < 1$). Случай $\ln x \gg (\ln D)^{\frac{2}{1-\tau}}$ ($\tau = {}^3/_4 + \varepsilon$) рассмотрен Н. Г. Чудаковым [6].

Поступило
31 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] К. А. Родосский, Укр. матем. журн., 3, 4, 399 (1951). [2] Ю. В. Линник, Матем. сборн., 15, 1 (1944). [3] Н. Г. Чудаков, Ann. of Math., 48, 3, 516 (1947). [4] H. Heilbronn, Math. Zs., 36, 400 (1932). [5] К. А. Родосский, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, 123 (1948). [6] Н. Г. Чудаков, там же, 12, 31 (1948).