

Б. И. ПЛОТКИН

**К ТЕОРИИ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ**

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 5 IV 1952)

§ 1. 1. Пусть группа  $\mathfrak{G}$  обладает таким вполне упорядоченным рядом нормальных делителей, содержащим единицу и всю группу:

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \dots \subset A_\gamma = \mathfrak{G}, \quad (1)$$

что при всех  $\alpha$   $A_{\alpha+1}/A_\alpha$  — абелевы группы конечного ранга\*. Тогда группу  $\mathfrak{G}$  назовем  $\rho$ -разрешимой, ряд (1) — ее  $\rho$ -разрешимым рядом и число (вообще говоря, трансфинитное)  $\gamma$  — длиной этого ряда.

Группу  $\mathfrak{G}$  назовем  $\rho$ -конечной, если она обладает конечным рациональным рядом, т. е. конечным нормальным рядом, все факторы которого абелевы группы без кручения ранга 1.

Как обычно<sup>(1)</sup>, вводятся понятия локально  $\rho$ -разрешимой и локально  $\rho$ -конечной группы.

$\rho$ -разрешимые группы (под названием разрешимых) изучались Р. Бэром<sup>(2)</sup>. При этом на группу накладывалось особое  $(\mathfrak{G})$ -свойство. Наше свойство  $N$  (см. определение) аналогично  $(\mathfrak{G})$ -свойству Бэра. Доказываемая ниже теорема 1 также аналогична соответствующей теореме Бэра.

Глубокие результаты в теории групп, обладающих конечным  $\rho$ -разрешимым рядом, получены А. И. Мальцевым<sup>(3)</sup>. Настоящая заметка опирается на эту работу А. И. Мальцева и на теорию  $R$ -групп П. Г. Конторовича<sup>(4)</sup>.

2. Группа без кручения  $\mathfrak{G}$  называется  $R$ -группой<sup>(4)</sup>, если для любой пары ее элементов  $x$  и  $y$  из  $x^n = y^n$  следует  $x = y$ .  $R^*$ -группой называется группа, все фактор-группы которой по инвариантным изолированным подгруппам являются  $R$ -группами.  $R^{**}$ -группой называется группа, все подгруппы которой являются  $R^{**}$ -группами.

3. Будем говорить, что группа  $\mathfrak{G}$  обладает свойством  $N$ , если для любой пары ее подгрупп  $A$  и  $B$  из того, что  $A$  — максимальная изолированная подгруппа в  $B$ , следует, что  $A$  инвариантна в  $B$ . Свойством  $N$  обладают локально нильпотентные группы без кручения. Локально нильпотентные группы без кручения являются также примером локально  $\rho$ -конечных групп, причем последние ими не исчерпываются.

§ 2. Лемма 1. *Всякая  $\rho$ -разрешимая  $R^*$ -группа обладает  $\rho$ -разрешимым рядом с факторами без кручения.*

Лемма 2.  *$R^*$ -группа тогда и только тогда  $\rho$ -конечна, когда она обладает  $\rho$ -разрешимым рядом конечной длины.*

\* Абелева группа называется группой конечного ранга, если ее фактор-группа по периодической части имеет конечный ранг.

Доказательство обеих лемм опирается на следующее свойство  $R^*$ -групп<sup>(9)</sup>. Пусть  $A$  и  $B$  — две инвариантные подгруппы  $R^*$ -группы, причем  $A \subset B$  и  $B/A$  — абелева группа ранга  $n$ . Тогда, если  $I(A)$  и  $I(B)$  — их изоляторы<sup>(6)</sup>, то  $I(B)/I(A)$  — абелева группа без кручения ранга  $\leq n$ .

§ 3. Теорема 1. *Для того чтобы группа без кручения была  $\rho$ -разрешимой  $R^*$ -группой со свойством  $N$ , необходимо и достаточно, чтобы она обладала возрастающим центральным рядом.*

Достаточность следует из<sup>(6, 9)</sup>.

Необходимость доказывается индукцией по длине  $\rho$ -разрешимого ряда, все факторы которого без кручения. Используя тот факт, что всякая  $\rho$ -конечная  $R$ -группа со свойством  $N$  нильпотентна<sup>(9)</sup>, нетрудно показать, что такой  $\rho$ -разрешимый ряд можно уплотнить до центрального.

Следствие.  $\rho$ -разрешимая локально нильпотентная группа без кручения обладает возрастающим центральным рядом<sup>(2)</sup>.

Из доказанной теоремы вытекает

Теорема 2. *Группа без кручения тогда и только тогда является локально  $\rho$ -разрешимой  $R^*$ -группой со свойством  $N$ , когда она локально нильпотентна.*

Заметим, что в условии теоремы 2 локальную  $\rho$ -разрешимость можно заменить локальной  $\rho$ -конечностью.

§ 4. Доказательства этого параграфа существенно опираются на результаты А. И. Мальцева<sup>(3)</sup>. Теорема 3 является усилением для случая  $R^*$ -групп теоремы 4 из<sup>(3)</sup>.

Введем следующее вспомогательное определение. Нормальный ряд подгрупп некоторой группы  $\mathfrak{G}$

$$E = \mathfrak{Z}_0 \subset \mathfrak{Z}_1 \subset \dots \subset \mathfrak{Z}_\alpha \subset \mathfrak{Z}_{\alpha+1} \subset \dots \quad (2)$$

назовем централизаторным относительно подгруппы  $F \supset \mathfrak{G}$ , если при любом  $\alpha$   $[E, \mathfrak{Z}_{\alpha+1}] \subset \mathfrak{Z}_\alpha$ . Другими словами, ряд (2) централизаторный относительно  $F$ , если элементы из  $F$  вызывают тождественные автоморфизмы в факторах  $\mathfrak{Z}_{\alpha+1}/\mathfrak{Z}_\alpha$ . Нетрудно видеть, что ряд пересечений  $\dots, F \cap \mathfrak{Z}_\alpha, \dots$  будет центральным в  $F$ .

Лемма 3. *Пусть  $\mathfrak{G}$  —  $\rho$ -разрешимая  $R^*$ -группа и  $A$  — ее инвариантная абелева подгруппа конечного ранга. Тогда в  $A$  можно провести рациональный ряд, централизаторный относительно коммутанта группы.*

Доказательство. Согласно<sup>(3)</sup> найдем в  $\mathfrak{G}$  подгруппу конечного индекса  $H$  такую, что ее коммутант  $K(H)$  вызывает тождественные автоморфизмы в факторах некоторого рационального ряда подгруппы  $A$ . Пусть

$$E = B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset B_{n-1} \subset B_n = A \quad (3)$$

такой рациональный ряд. Найдем нормальный делитель конечного индекса  $H_1 \subset H$ . Тогда  $K(H_1) \subset K(H)$ , и, следовательно, ряд (3) будет централизаторным относительно  $K(H_1)$ . Рассмотрим изоляторы нормальных делителей  $K(H_1)$  и  $H_1$ . Очевидно,  $I(H_1) = \mathfrak{G}$  и  $\mathfrak{G}/I(K(H_1)) = I(H_1)/I(K(H_1))$  — абелева группа без кручения (§ 1). Отсюда коммутант всей группы содержится в  $I(K(H_1))$ . Легко видеть, что ряд (3) будет централизаторным относительно  $I(K(H_1))$ <sup>(9)</sup> и поэтому относительно коммутанта группы.

Теорема 3.  $\rho$ -разрешимая  $R^*$ -группа  $\mathfrak{G}$  является расширением своей максимальной инвариантной подгруппы, обладающей возрастающим центральным рядом, при помощи абелевой группы без кручения.

Доказательство. Вначале покажем, что коммутант  $K(\mathfrak{G})$  группы  $\mathfrak{G}$  обладает возрастающим центральным рядом.

Проведем в  $\mathfrak{G}$   $\rho$ -разрешимый ряд

$$E = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_\alpha \subset A_{\alpha+1} \subset \dots \subset A_\gamma = \mathfrak{G}, \quad (1')$$

все члены которого изолированы в  $\mathfrak{G}$ . Так как все факторы  $\mathfrak{G}/A_\alpha$  являются  $R^*$ -группами, то к каждому из них можно применить лемму и, следовательно, ряд (1') можно уплотнить до централизаторного относительно коммутанта. Отсюда вытекает, что коммутант обладает возрастающим центральным рядом.

Обозначим теперь через  $\mathfrak{G}^*$  подгруппу, порожденную всеми локально нильпотентными нормальными делителями группы  $\mathfrak{G}$ .  $\mathfrak{G}^*$  будет максимальным локально нильпотентным нормальным делителем в  $\mathfrak{G}$ . Следовательно (<sup>9</sup>),  $\mathfrak{G}^*$  — изолированная подгруппа. Так как коммутант содержится в  $\mathfrak{G}^*$ , то  $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}^*$  — абелева группа, причем без кручения. С другой стороны,  $\mathfrak{G}^*$   $\rho$ -разрешима и поэтому, в силу следствия теоремы 1, обладает возрастающим центральным рядом.

**Теорема 4.** *Локально  $\rho$ -разрешимая  $R^{**}$ -группа  $\mathfrak{G}$  является расширением своей максимальной локально нильпотентной инвариантной подгруппы при помощи абелевой группы без кручения.*

Мы ограничимся доказательством того, что коммутант  $K(\mathfrak{G})$  группы  $\mathfrak{G}$  локально нильпотентен. Пусть  $g_1, g_2, \dots, g_n$  — конечное множество элементов из  $K(\mathfrak{G})$ . Тогда, рассуждая как в (<sup>4</sup>) (стр. 317), можно найти такую локальную подгруппу  $H$ , что эти элементы лежат в  $K(H)$ . Так как  $H$  —  $\rho$ -разрешимая  $R^*$ -группа, то  $K(H)$  обладает возрастающим центральным рядом, и поэтому  $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$  — нильпотентная подгруппа. Отсюда  $K(\mathfrak{G})$  — локально нильпотентная группа.

**Теорема 5.** *Пусть  $\mathfrak{G}$  — локально  $\rho$ -разрешимая  $R^{**}$ -группа. Тогда, если в  $\mathfrak{G}$  выполняется хотя бы одно из условий минимальности или максимальной по изолированным подгруппам, то  $\mathfrak{G}$   $\rho$ -конечна.*

Заметим, что обратное очевидно: если  $\mathfrak{G}$   $\rho$ -конечна, то она  $\rho$ -разрешима и удовлетворяет обоим условиям обрыва цепей изолированных подгрупп.

**Теорема 6.** *Пусть  $\mathfrak{G}$  — локально  $\rho$ -разрешимая  $R^{**}$ -группа. Тогда, если все абелевы подгруппы коммутанта группы  $\mathfrak{G}$  имеют конечный ранг, то  $\mathfrak{G}$  является расширением  $\rho$ -конечной нильпотентной группы при помощи абелевой группы без кручения. Такая группа будет локально  $\rho$ -конечной.*

Теоремы 5 и 6 вытекают из теоремы 4 и работы (<sup>3</sup>).

§ 5. Известно, что всякая упорядоченная группа является  $R$ -группой и обладает разрешимым множеством (<sup>7</sup>). Поэтому теория разрешимых  $R$ -групп связана с теорией упорядоченных групп. А. И. Мальцевым (<sup>7</sup>) доказано, что если все выпуклые подгруппы упорядоченной группы инвариантны, то коммутант группы обладает центральным множеством. Используя тот факт, что упорядоченная группа является  $R$ -группой, этот результат можно дополнить: можно доказать, что и изолятор коммутанта обладает центральным множеством.

Таким образом, в случае, когда все выпуклые подгруппы упорядоченной группы инвариантны, такая группа является расширением группы с центральным множеством при помощи абелевой группы без кручения.

Д. М. Смирнов (<sup>8</sup>) доказал, что в упорядоченной локально нильпотентной группе всякая выпуклая подгруппа инвариантна. Этот результат можно обобщить.

Теорема 7. В локально  $\rho$ -конечной упорядоченной группе всякая выпуклая подгруппа инвариантна.

При доказательстве используется тот факт, что в упорядоченной группе всякая выпуклая подгруппа инфраинвариантна и изолирована, и следующая лемма.

Лемма. Всякая изолированная инфраинвариантная подгруппа локально  $\rho$ -конечной группы инвариантна.

Примером локально  $\rho$ -конечной (не локально нильпотентной) упорядоченной группы может служить группа треугольных матриц над полем рациональных чисел с положительными рациональными числами на главной диагонали. Этот пример можно распространить и на бесконечные матрицы.

Уральский государственный университет  
им. А. М. Горького

Поступило  
8 II 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. Г. Курош, Теория групп, М., 1944. <sup>2</sup> R. Baer, Trans. Amer. Math. Soc., 47, № 3, 393 (1940). <sup>3</sup> А. И. Мальцев, Матем. сборн., 28, (70): 3, 567 (1951). <sup>4</sup> П. Г. Конторович, там же, 22 (64): 2, 79 (1948). <sup>5</sup> П. Г. Конторович, там же, 19 (61): 2, 287 (1946). <sup>6</sup> А. И. Мальцев, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 201 (1949). <sup>7</sup> А. И. Мальцев, там же, 13, 473 (1949). <sup>8</sup> Д. М. Смирнов, ДАН, 76, № 5, 643 (1951). <sup>9</sup> Б. И. Плоткин, Матем. сборн., 30, в. 1, 146 (1952).