Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

М. М. ГРИНБЛЮМ

ОБЩЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАТОРНОГО ИНТЕГРАЛА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 9 IV 1952)

Пусть E — регулярное пространство Банаха и $P(M)$ — спектральная мера в E, определенная на $I=(-\infty, \infty)$ (1). Назовем вещественную функцию $f(\lambda)$, определенную на I, P-измеримой, если прообраз любого отрезка (2) $f^{-1}(\Delta)$ измерим по отношению к $P(M)$. Комплексную функцию $f(\lambda)$ назовем P-измеримой, если функции $\operatorname{Re} f(\lambda)$ и $\operatorname{Im} f(\lambda)$ P-измеримы.

Легко видеть, что множество P-измеримых функций замкнуто по отношению к обычным алгебраическим операциям и операции предельного перехода.

Рассмотрим плоскость комплексного переменного $W=f(\lambda)$. Под прямоугольником R в этой плоскости мы будем понимать прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, включая все стороны или без каких-либо из сторон. Легко видеть, что для того, чтобы комплексная функция $f(\lambda)$ была P-измерима, необходимо и достаточно, чтобы прообраз любого прямоугольника $R-f^{-1}(R)$ был P-измерим.

§ 1. Определение 1. Пусть $f(\lambda)$ — P-измеримое множество и пусть $f(\lambda)$ — P-измеримая ограниченная комплексная функция, определенная на A. Пусть R — прямоугольник, содержащий область значений $f(\lambda)$. Прямыми, параллельными действительной и мнимой осям, разбиваем R на k прямоугольников R_i так, чтобы $\max d_i < \varepsilon$, где d_i — диаметр прямоугольника R_i. Определим оператор $S_k=\sum_1^k l_i P(M_i)$, где $M_i=f^{-1}(R_i)$, а $l_i=f(\lambda_i)$ — произвольное значение переменного $W=f(\lambda)$, лежащее в прямоугольнике R_i, если пересечение R_i и области значений функции $f(\lambda)$ не пусто, и $l_i=0$, если это пересечение пусто. Пусть $k\to\infty$ и притом так, что $\max d_i\to 0$. Тогда операторы S_k сходятся в смысле сильной сходимости операторов к линейному оператору U, причем норма его

$$|U| \leqslant \frac{4}{\beta} \sup |f(\lambda)|.$$

Мы полагаем, по определению, $U=\int\limits_A f(\lambda) P(M)$.

Если Φ — линейный функционал, определенный на E, и $x\in E$, то $\Phi(Ux)$ есть обычный интеграл Лебега — Стильтьеса.

Теорема 1. 1°. *Если $f_1(\lambda)$ и $f_2(\lambda)$ — ограниченные измеримые функции, то* $\int\limits_A (\alpha f_1+\beta f_2) P(M)=\alpha\int\limits_A f_1 P(M)+\beta\int\limits_A f_2 P(M)$.

2°. *Если* $A=\bigcup\limits_1^k A_i$ *и* $A_i \cap A_j$ *пусто при* $i \neq j$, *то* $\int\limits_A fP(M) = \sum\limits_1^k \int\limits_{A_i} fP(M)$.

3°. *Если* $A=\bigcup\limits_1^\infty A_i$, *где* $A_i \cap A_j$ *пусто при* $i \neq j$, *то* $\int\limits_A fP(M)x = \sum\limits_1^\infty \int\limits_{A_i} fP(M)x$ *для любого* x.

4°. *Если* $f_n(\lambda)$ *равномерно стремятся к* $f(\lambda)$, *то и* $\int\limits_A f_nP(M) \to \int\limits_A fP(M)$ *в смысле сильной сходимости операторов.*

5°. $\int\limits_A f_1P(M)\left(\int\limits_A f_2P(M)x\right) = \int\limits_A f_2P(M)\left(\int\limits_A f_1P(M)x\right) = \int\limits_A f_1f_2P(M)x.$

Легко видеть, что если $f(\lambda)$ принадлежит классу K ([3]), то определенный в ([3]) интеграл от $f(\lambda)$ совпадает с определенным выше интегралом.

§ 2. Определение 2. Пусть функция $f(\lambda)$ измерима и неограничена и пусть множество точек, в которых $f(\lambda)=\infty$, имеет P-меру нуль. Пусть $f_n(\lambda)=f(\lambda)$, если $|f(\lambda)| \leqslant n$, и $f_n(\lambda)=0$, если $|f(\lambda)|>n$. Полагаем, по определению,

$$Ux = \int\limits_A f(\lambda)P(M)x = \lim_{n\to\infty}\int\limits_A f_n(\lambda)P(M)x,$$

если этот предел существует.

Обозначим многообразие элементов $x \in E$, для которых этот предел существует, через Ωf.

Теорема 2. 1°. *Если* $A=A_1 \cup A_2$ *и* $A_1 \cap A_2$ *пусто, то*

$$\int\limits_A fP(M) = \int\limits_{A_1} fP(M) + \int\limits_{A_2} fP(M).$$

2°. *Если* $A' \subset A''$ *и* $\int\limits_{A''} fP(M)x$ *существует, то и* $\int\limits_{A'} fP(M)x$ *существует.*

3°. *Если* $A=\bigcup\limits_1^\infty A_i$, $A_i \cap A_j$ *пусто при* $i \neq j$ *и* $\int\limits_A fP(M)x$ *существует, то* $\int\limits_A fP(M)x = \sum\limits_1^\infty \int\limits_{A_i} fP(M)x$.

4°. *Если* $x \in \Omega f_1$ *и* $x \in \Omega f_1f_2$, *то*

$$\int\limits_A f_1f_2P(M)x = \int\limits_A f_1P(M)\left(\int f_2P(M)x\right).$$

Теорема 3. *Оператор* $U=\int\limits_A f(\lambda)P(M)$ *определен на всюду плотном в* E *многообразии* Ωf *и замкнут.*

Легко видеть, что если функция $f(\lambda)$ принадлежит классу $K(\lambda_0)$ или классам $K(\infty)$ или $K(-\infty)$ ([3]), то интеграл от $f(\lambda)$, определенный в ([3]), совпадает с определенным выше интегралом.

§ 3. Пусть $\{P_\lambda, P^\lambda\}$ — (α)-пара (см. ([1])) и пусть (μ, ν) — интервал на $(-\infty, \infty)$. Определим два семейства подпространств $\{P'_\lambda\}$ и $\{P'^\lambda\}$ пространства E по следующим формулам:

1°. $-\infty < \mu < \nu < \infty$. Тогда $P'_\lambda = P_{\mu+0,\lambda}$ и $P'^\lambda = P_{\lambda,\nu-0}$ при $\mu < \lambda < \nu$; $P'_\lambda \equiv \theta$ и $P'^\lambda = P_{\mu+0,\nu-0}$ при $\lambda \leqslant \mu$; $P'_\lambda = P_{\mu+0,\nu-0}$ и $P'^\lambda \equiv \theta$ при $\lambda \geqslant \nu$.

2°. $\mu = -\infty$. Тогда $P'_\lambda = P_\lambda$ и $P'^\lambda = P_{\lambda,\nu-0}$ при $\lambda < \nu$; $P'_\lambda = P_{\nu-0}$ и $P'^\lambda \equiv \theta$ при $\lambda \geqslant \nu$.

3°. $\nu = \infty$. Тогда $P'_\lambda \equiv \theta$ и $P'^\lambda = P^{\mu+0}$ при $\lambda \leqslant \mu$; $P'_\lambda = P_{\mu-0,\lambda}$ и $P'^\lambda = P^\lambda$ при $\lambda > \mu$.

4°. $\mu = -\infty$, $\nu = \infty$. Тогда $P'_\lambda = P_\lambda$ и $P'^\lambda = P^\lambda$.

Легко видеть, что $\{P'_\lambda; P'^\lambda\}$ есть (α)-пара в пространстве $P_{\mu+0,\nu-0}$. Кроме того, если $\{P_\lambda; P^\lambda\}$ — (β)-пара, то и $\{P'_\lambda; P'^\lambda\}$ — (β)-пара.

Мы будем говорить, что $\{P'_\lambda; P'^\lambda\}$ есть (α)-пара, индуцированная (α)-парой $\{P_\lambda; P^\lambda\}$ на интервале (μ, ν), и будем ее обозначать символом $\overset{\nu)}{\underset{(\mu}{}}\{P_\lambda; P^\lambda\}$.

Вполне аналогично обозначаются пары, индуцированные (α)-парой на сегменте $[\mu, \nu]$ и полуинтервалах $[\mu, \nu)$ и $(\mu, \nu]$: эти индуцированные пары мы будем обозначать символами $\overset{\nu]}{\underset{[\mu}{}}\{P_\lambda; P^\lambda\}$, $\overset{\nu)}{\underset{[\mu}{}}\{P_\lambda; P^\lambda\}$, $\overset{\nu]}{\underset{(\mu}{}}\{P_\lambda; P^\lambda\}$. Операторные функции отрезка, соответствующие индуцированным парам, мы будем обозначать через: $\overset{\nu)}{\underset{(\mu}{P}}(\Delta)$, $\overset{\nu]}{\underset{[\mu}{P}}(\Delta)$, $\overset{\nu)}{\underset{[\mu}{P}}(\Delta)$, $\overset{\nu]}{\underset{(\mu}{P}}(\Delta)$.

Определение 3. Точка $\lambda \in (-\infty, \infty)$ называется точкой полного разложения (α)-пары $\{P_\lambda; P^\lambda\}$ или операторной (α)-функции $P(\Delta)$, если существует такой, содержащий эту точку, интервал (μ, ν), что $\overset{\nu)}{\underset{(\mu}{P}}(\Delta)$ есть спектральная функция в пространстве $P((\mu, \nu))$. Мы будем говорить, что ∞ (соответственно $-\infty$) есть точка полного разложения, если существует такое μ (и, соответственно, ν), что $\overset{\infty)}{\underset{(\mu}{P}}(\Delta)$ (соответственно $\overset{\nu)}{\underset{(-\infty}{P}}$) есть спектральная функция.

Всякая точка $\lambda \in [-\infty, \infty]$, не являющаяся точкой полного разложения, называется точкой неполного разложения (α)-пары $\{P_\lambda; P^\lambda\}$ или операторной (α)-функции $P(\Delta)$.

Легко видеть, что множество точек неполного разложения операторной (α)-функции $P(\Delta)$ замкнуто.

Теорема 4. *Если любая точка сегмента* $[\mu, \nu]$ *является точкой полного разложения операторной* (α)*-функции* $P(\Delta)$, *то* $\overset{\nu]}{\underset{[\mu}{P}}(\Delta)$ *есть спектральная функция в пространстве* $P([\mu, \nu])$. *В частности, если любая точка* $[-\infty, \infty]$ *является точкой полного разложения операторной* (α)*-функции* $P(\Delta)$, *то* $P(\Delta)$ — *спектральная функция в* E.

§ 4. Определение индуцированной пары естественно приводит к новому обобщению операторного интеграла.

Пусть $\{P_\lambda; P^\lambda\}$ — (α)-пара и $P(\Delta)$ — соответствующая ей операторная (α)-функция. Пусть (μ, ν) — интервал, каждая точка которого есть точка полного разложения для $P(\Delta)$. Если $[\mu', \nu']$ — сегмент, лежащий внутри интервала (μ, ν), то, по теореме 4, $\overset{\nu']}{\underset{[\mu'}{P}}(\Delta)$ есть спектральная функция, и, значит, на сегменте $[\mu', \nu']$ функция $P(\Delta)$ может быть продолжена в спектральную меру.

Назовем функцию $f(\lambda)$ P-измеримой на отрезке Δ, если множество, являющееся пересечением прообраза $f^{-1}(R)$ любого прямоугольника R с отрезком Δ, P-измеримо.

Пусть теперь $f(\lambda)$ — неограниченная функция, определенная на $(-\infty, \infty)$, P-измеримая на любом сегменте $[\mu', \nu']$ и такая, что пересечение множества точек, в которых $f(\lambda)$ обращается в бесконечность, с любым сегментом $[\mu', \nu']$ имеет P-меру нуль.

Определение 4. Интегралом от функции $f(\lambda)$ по отношению к $P(\Delta)x$, распространенным на интервал (μ, ν), называется предел (в сильном смысле) выражения $\int\limits_{[\mu', \nu']} f(\xi) \overset{\nu']}{\underset{[\mu'}{P}} (\Delta_\xi) x$ при $\mu < \mu' \to \mu$ и $\nu > \nu' \to \nu$, если только этот предел существует. Мы будем писать:

$$\int\limits_{(\mu, \nu)} f(\xi) P(\Delta_\xi) x = \lim_{\substack{\mu < \mu' \to \mu \\ \nu > \nu' \to \nu}} \int\limits_{[\mu', \nu']} f(\xi) \overset{\nu']}{\underset{[\mu'}{P}} (\Delta_\xi) x.$$

Далее полагаем, по определению,

$$\int\limits_{[\mu, \nu]} f(\xi) P(\Delta_\xi) x = \int\limits_{(\mu, \nu)} f(\xi) P(\Delta_\xi) x + f(\mu) P(\Delta \equiv \mu) x + f(\nu) P(\Delta \equiv \nu) x.$$

Отметим, что в частном случае мы будем иметь:

$$\int\limits_{[-\infty, \infty]} f(\xi) P(\Delta_\xi) x = \int\limits_{(-\infty, \infty)} f(\xi) P(\Delta_\xi) x.$$

Легко видеть, что этот интеграл есть замкнутый оператор, определенный на многообразии, плотном в $P([\mu, \nu])$.

Определение 5. Пусть операторная (α)-функция имеет на (μ, ν) только конечное число точек неполного разложения и пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \ldots, \lambda_m$ — те из них, для которых $\mu < \lambda_k < \nu$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$. Тогда интегралом от функции $f(\lambda)$ по отношению $P(\Delta)x$, распространенным на сегмент $[\mu, \nu]$, мы будем называть сумму:

$$\int\limits_{[\mu_1, \nu_1)} f(\xi) P(\Delta_\xi) x + \sum_{k=1}^{m-1} \int\limits_{[\lambda_k, \lambda_{k+1}]} f(\xi) P(\Delta_\xi) x + \int\limits_{[\lambda_m, \nu]} f(\xi) P(\Delta_\xi) x$$

при условии, что каждый входящий в эту сумму интеграл существует. Определенный таким образом интеграл мы будем обозначать символом

$$\int\limits_{[\mu, \nu]} f(\xi) P(\Delta_\xi) x.$$

Замечание. Естественным образом, если исходить из определения точек неполного разложения, можно построить операторную тотализацию, аналогичную тотализации Данжуа.

Средне-Азиатский государственный университет

Поступило 9 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. М. Гринблюм, ДАН, **81**, № 3, 345 (1951). [2] М. М. Гринблюм, ДАН, **70**, № 6, 941 (1950). [3] М. М. Гринблюм, ДАН, **71**, № 1, 5 (1950).