

Н. И. ГАВРИЛОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 III 1952)

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n P_{ik}(t) x_k \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (1)$$

где  $P_{ik}(t)$  — непрерывные (вообще говоря, комплексные) функции действительного переменного  $t$  при  $t \geq t_0$ . Иногда для исследования системы (1) на устойчивость по Ляпунову<sup>(1)</sup> применяется следующий метод.

Составим формально для системы (1) характеристическое уравнение  $|P_{ik}(t) - \lambda \delta_i^k| = 0$  с переменными коэффициентами. Возникает вопрос о том, можно ли по величине и знаку  $\operatorname{Re} \lambda_s(t)$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ) сделать какие-либо выводы относительно устойчивости системы (1)? Например, если существуют такие  $\delta > 0$  и  $T \geq t_0$ , что  $\operatorname{Re} \lambda_s(t) < -\delta$  при  $t \geq T$ ,  $s = 1, 2, \dots, n$ , то будет ли система (1) устойчивой по Ляпунову? Известно, что при постоянных  $P_{ik}$  ответ получается утвердительным. Если же  $P_{ik}$  — переменные, то это совсем не очевидно. К. Персидский в работе<sup>(2)</sup> устанавливает, что ответ остается утвердительным и при переменных  $P_{ik}(t)$ , если только  $P_{ik}(t)$  — ограниченные функции со слабой вариацией. Персидский вводит следующее определение: непрерывная при  $t \geq t_0$  функция  $f(t)$  называется функцией со слабой вариацией, если для любой пары чисел  $\varepsilon > 0$ ,  $T > 0$  найдется число  $N(\varepsilon, T) > 0$  так, что неравенство  $|f(t_2) - f(t_1)| < \varepsilon$  выполнено при всех  $t_1 > N$ ,  $t_2 > N$ , если только  $|t_2 - t_1| < T$ .

Весь метод исследования на устойчивость, основанный на рассмотрении характеристического уравнения  $|P_{ik}(t) - \lambda \delta_i^k| = 0$ , назовем методом обобщенного характеристического уравнения. В нашей работе устанавливается достаточно широкий класс систем (1), для которых метод обобщенного характеристического уравнения дает ответ на вопрос об устойчивости. Мы показываем, что системы с условиями Персидского являются лишь частным случаем систем этого класса. Одновременно мы полностью выясняем структуру функций со слабой вариацией.

1. О методе обобщенного характеристического уравнения

Этот метод можно обосновать, если воспользоваться детерминантным критерием устойчивости, установленным нами в работе<sup>(3)</sup>. Именно, если детерминантный критерий к системе (1) непосредственно не при-

меним, то полезно предварительно подвергнуть систему (1) линейному преобразованию с переменными (вообще говоря) коэффициентами.

Представляют интерес только преобразования ляпуновского типа, т. е. с непрерывно дифференцируемыми ограниченными коэффициентами и ограниченной обратной матрицей. Одно из наиболее важных преобразований системы (1) можно построить так.

Рассмотрим матрицу  $\|P_{ik}(t)\|$  при фиксированном  $t$ . Известно, что существует неособое линейное преобразование, приводящее ее к канонической жордановой форме. Пусть это преобразование имеет вид

$$y_s = \sum_{k=1}^n \alpha_{sk}(t) x_k, \quad s = 1, 2, \dots, n. \quad (2)$$

Будем предполагать, что каждый корень уравнения  $|P_{ik}(t) - \lambda \delta_i^k| = 0$  сохраняет постоянную кратность, а преобразование (2) принадлежит к ляпуновскому типу. Всегда можно считать, что  $|\alpha_{sk}(t)| \leq 1$ .

Если систему (1) подвергнуть преобразованию (2), то мы не получим, очевидно, канонической матрицы у преобразованной системы. Более точно, преобразованная система будет иметь „почти каноническую“ матрицу  $A = B + C$ , где  $C = \|c_{ik}(t)\|$  — каноническая „ящичная“ матрица, а  $B = \|b_{ik}(t)\|$  — дополнительная матрица, элементы которой  $b_{ik}(t)$  являются линейными комбинациями с ограниченными коэффициентами из производных от величин  $\alpha_{pq}(t)$ . Итак, преобразованная система имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = By + Cy. \quad (3)$$

Если теперь система (3) удовлетворяет детерминантному критерию (3), то система (1) является устойчивой по Ляпунову.

В работе (3) было показано, что детерминантный критерий выполняется при достаточно широких предположениях.

Имея в виду метод обобщенного характеристического уравнения и, в частности, критерий Персидского, мы ограничимся изучением одного частного случая, когда детерминантный критерий заведомо выполнен.

**Теорема 1.** Пусть система (1) преобразованием (2) ляпуновского типа приводится к „почти каноническому“ виду так, что:

а) если  $\lambda_s(t)$  — кратный корень со степенью элементарного делителя  $l_s > 1$ , то существуют  $\delta > 0$ ,  $T \geq t_0$  такие, что  $\operatorname{Re} \lambda_s(t) < -\delta$  при  $t \geq T$ , а в соответствующих строчках дополнительной матрицы находятся элементы  $b_{ik}(t)$  либо абсолютно интегрируемые на  $[t_0, +\infty)$ , либо стремящиеся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , если индексы  $i \geq k$ , и  $b_{ik}(t)$  — ограниченные непрерывные функции, если индексы  $i < k$ ;

б) если  $\lambda_s(t)$  — простой корень или кратный, но  $l_s = 1$ , то при выполнении условия  $\operatorname{Re} \lambda_s(t) < -\delta$  при  $t \geq T$  остаются условия на  $b_{sk}(t)$  из п. а); если же это условие относительно  $\operatorname{Re} \lambda_s(t)$  не выполнено, то требуется, чтобы существовало  $N > 0$  так, что

$\int_{t_0}^t \operatorname{Re} \lambda_s(\tau) d\tau < N$  при  $t \geq t_0$ , а все элементы  $b_{sk}(t)$  из соответствующей строчки дополнительной матрицы были абсолютно интегрируемы на  $[t_0, \infty)$ .

Тогда система (1) устойчива по Ляпунову.

Эта теорема следует из детерминантного критерия (3) и может быть положена в основу метода обобщенного характеристического уравнения.

## 2. О критерии Персидского

Покажем теперь, что системы с условиями Персидского являются частным случаем систем, удовлетворяющих условиям теоремы, доказанной выше. Для этого выясним более детально структуру функций, названных Персидским функциями со слабой вариацией. Для пояснения этого понятия Персидский приводит в (2) два примера таких функций. Именно, если  $\varphi_1(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то  $\varphi_1(t)$  — функция со слабой вариацией, или, если  $\varphi_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , то  $\varphi_2(t)$  — функция со слабой вариацией. Однако Персидский не выяснил структуры любой функции этого класса. Докажем, что имеет место следующая лемма.

**Лемма 1.** *Любая непрерывная функция  $f(t)$  со слабой вариацией является суперпозицией двух функций  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ , где:*  
 1)  $f_1(t)$  дифференцируема и производная  $f_1'(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;  
 2)  $f_2(t)$  непрерывна и  $f_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность пар чисел  $\{\varepsilon_n, T_n\}$ , где  $\varepsilon_n = (1/n)^2$ ,  $T_n = 1/n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Поскольку  $f(t)$  имеет слабую вариацию, то каждой паре  $\{\varepsilon_n, T_n\}$  отвечает число  $N_n > 0$  такое, что при любых  $t_1 \geq N_n$ ,  $t_2 \geq N_n$   $|f(t_2) - f(t_1)| < \varepsilon_n$ , если только  $|t_2 - t_1| < T_n$ . В силу непрерывности  $f(t)$  получим  $|f(t_2) - f(t_1)| \leq \varepsilon_n$ , если  $|t_2 - t_1| \leq T_n$ ,  $t_1 \geq N_n$ ,  $t_2 \geq N_n$ . Отметим точку  $N_1$  на оси  $t$  и разделим отрезок  $[N_1, +\infty)$  на части равной длины  $T_1$ . Число  $N_2$  можно считать достаточно большим,  $N_2 > N_1$ , а точку  $N_2$  совпадающей с одной из точек деления.

Отметим точку  $N_2$  и уничтожим все точки деления из  $[N_2, +\infty)$ . Восстановим в точках деления на  $[N_1, N_2]$  ординаты  $f(t)$  и, соединив прямолинейными отрезками последовательные точки на графике  $f(t)$ , получим обычную ломаную, вписанную в график  $f(t)$  на  $[N_1, N_2]$ . Очевидно, наклон каждого звена этой ломаной на  $[N_1, N_2]$  не превосходит  $\varepsilon_1/T_1 = 1$ . После этого делим отрезок  $[N_2, +\infty)$  на части равной длины  $T_2$ . Число  $N_3$  считаем достаточно большим,  $N_3 > N_2$ , и совпадающей с одной из точек деления. Уничтожим теперь точки из отрезка  $[N_3, +\infty)$ . Впишем в график  $f(t)$  на  $[N_2, N_3]$  ломаную. Наклон каждого ее звена не превосходит, очевидно,  $\varepsilon_2/T_2 = 1/2$  и т. д. Вообще, на  $[N_n, N_{n+1}]$  наклон соответствующей ломаной не превосходит  $\varepsilon_n/T_n = 1/n$ . Если сгладить уголки между звеньями маленькими дугами окружностей, то получим гладкую функцию. Обозначим ее  $f_1(t)$ . Очевидно,  $f_1'(t) \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Положим  $f_2(t) = f(t) - f_1(t)$ .  $f_2(t)$  непрерывна и состоит из петель, идущих между последовательными точками ломаной на графике  $f(t)$ . Амплитуда такой петли стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , ибо в противном случае нашлось бы  $\omega > 0$  и последовательность отрезков деления  $[\alpha_n, \beta_n]$  таких, что расстояние  $T_n = \beta_n - \alpha_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , а изменение  $f(t)$  на них превосходит  $\omega > 0$ , что противоречит определению  $f(t)$  как функции со слабой вариацией.

**Замечание.** Если  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = a$ , то  $f(t)$  — функция со слабой вариацией, ибо  $f(t) = a + \omega(t)$ , где  $\omega(t) \rightarrow 0$ . Здесь  $f_1(t) = a$ ,  $f_2(t) = \omega(t)$ .

**Лемма 2.** *Если  $F(u_1, u_2, \dots, u_n)$  — функция, равномерно непрерывная по совокупности аргументов в области  $G$ , а каждая  $u_s = u_s(t)$  — функция со слабой вариацией при  $t \geq t_0$ , то  $F$ , как функция от  $t$ , тоже функция со слабой вариацией при  $t \geq t_0$ .*

Если  $P_{ik}(t)$  ограничены и со слабой вариацией, то, по лемме 2, преобразование (2) имеет коэффициенты  $\alpha_{pq}(t)$ , являющиеся функциями со слабой вариацией, ибо  $\alpha_{pq}(t)$  равномерно непрерывная функция коэффициентов  $P_{ik}$ . Но тогда, по лемме 1,  $\alpha_{ik}(t) =$

$= \beta_{ik}(t) + \gamma_{ik}(t)$ , где  $\gamma_{ik}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , а  $\beta_{ik}(t)$  дифференцируема и  $\beta'_{ik}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Рассмотрим теперь преобразование  $y_s^* = \sum_{k=1}^n \beta_{sk}(t) x_k$ ,  $s=1, 2, \dots, n$ .

Оно приводит систему (1) к почти-каноническому виду, а так как  $\beta'_{sk}(t) \rightarrow 0$ , то дополнительная матрица имеет  $b_{ik}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Поскольку  $\operatorname{Re} \lambda_s(t) < -\delta$  при  $t \geq T$ ,  $s=1, 2, \dots, n$ , то выполнены все условия теоремы 1 настоящей работы, и критерий Персидского доказан.

Равномерная устойчивость системы (1) по начальному значению  $T$  следует непосредственно из оценок, приведенных в (3).

Из доказательства видно, что условия Персидского слишком жесткие. Для выполнения теоремы 1 требуется значительно меньше.

Одесский государственный университет  
им. И. И. Мечникова

Поступило  
11 III 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950. <sup>2</sup> К. Персидский, Изв. Казанск. физ.-мат. об-ва, 41 (1938). <sup>3</sup> Н. И. Гаврилов, ДАН, 84, № 3 (1952).