Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

В. В. ВАГНЕР

К ТЕОРИИ ЧАСТИЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

(Представлено академиком М. Н. Колмогоровым 9 IV 1952)

Как известно ([1]), задание бинарного отношения между элементами некоторого множества A' равносильно заданию подмножества $\rho \subset A \times A$, состоящего из всех пар (a_1, a_2) элементов, между которыми имеет место данное отношение, называемого графиком этого бинарного отношения. В дальнейшем мы будем отождествлять бинарные отношения и их графики, обозначая их одинаковыми символами.

Множество $\mathfrak{P}(A \times A)$* всех бинарных отношений между элементами множества A будет являться множеством, в котором определены следующие три структуры в смысле Бурбаки ([2]):

1) бинарная алгебраическая операция умножения бинарных отношений, относительно которой $\mathfrak{P}(A \times A)$ является полугруппой**;

2) отношение порядка, определяемое теоретико-множественным включением подмножества $A \times A$, замкнутое относительно умножения бинарных отношений

$$\{(\rho_1 \subset \rho_2) \cdot (\overline{\rho}_1 \subset \overline{\rho}_2)\} \rightarrow (\rho_1\overline{\rho}_1 \subset \rho_2\overline{\rho}_2); \tag{1}$$

3) каноническое симметричное преобразование, определяемое переходом от бинарного отношения ρ к обратному ему бинарному отношению ρ^{-1}, которое будет обратным автоморфизмом для операции умножения и автоморфизмом для отношения порядка:

$$(\rho^{-1})^{-1} = \rho, \quad (\rho_2\rho_1)^{-1} = \rho_1^{-1}\rho_2^{-1}, \quad (\rho_1 \subset \rho_2) \longleftrightarrow (\rho_1^{-1} \subset \rho_2^{-1}). \tag{2}$$

Подмножество множества $\mathfrak{P}(A \times A)$ будем называть симметричным, если оно инвариантно при каноническом симметричном преобразовании. Мы будем рассматривать симметричные подполугруппы полугруппы $\mathfrak{P}(A \times A)$. Наиболее важной среди них будет подполугруппа $\mathfrak{M}(A \times A)$ всех взаимно-однозначных частичных преобразований множества A, т. е. всех бинарных отношений $\rho \subset A \times A$, определяющих взаимно-однозначное отображение подмножества $pr_1\rho$ на подмножество $pr_2\rho$. Элементом $\mathfrak{M}(A \times A)$ является таыже и пустое преобразование, соответствующее пустому подмножеству произведения. Как известно, подможество $\mathfrak{M}(A \times A)$ определяется в множестве $\mathfrak{P}(A \times A)$ формулами

$$\rho\rho^{-1} \subset \Delta_{A}, \quad \rho^{-1}\rho \subset \Delta_{A}, \tag{3}$$

* Через $\mathfrak{P}(M)$ обозначается множество всех подмножеств множества M.
** Полуггруппой называется множество с произвольной однозначной всюду определенной ассоциативной бинарной алгебраической операцией.

где Δ_A — диагональ произведения $A \times A$, определяющая полное тождественное преобразование множества A.

При этом для элементов из $\mathfrak{M}(A \times A)$ верна формула [1]

$$\rho\rho^{-1}\rho = \rho. \tag{4}$$

Докажем, что *для любых элементов из* $\mathfrak{M}(A \times A)$ *верна формула*

$$(\rho_1 \subset \rho_2) \longleftrightarrow (\rho_1\rho_2^{-1}\rho_1 = \rho_1). \tag{5}$$

Доказательство. Замечая, что $(\rho_1 \subset \rho_2) \longleftrightarrow (\rho_1^{-1} = \rho_2^{-1})$ и $(\rho_1^{-1} \subset \rho_2^{-1}) \to (\rho_1\rho_1^{-1}\rho_1 \subset \rho_1\rho_2^{-1}\rho_1)$, мы получаем, согласно (4), $(\rho_1 \subset \rho_2) \to (\rho_1 \subset \rho_1\rho_2^{-1}\rho_1)$. Пользуясь первой из формул (3), имеем $(\rho_1 \subset \rho_2) \to (\rho_1\rho_2^{-1} \subset \Delta_A)$, откуда $(\rho_1 \subset \rho_2) \to (\rho_1\rho_2^{-1}\rho_1 \subset \rho_1)$. Таким образом получаем формулу

$$(\rho_1 \subset \rho_2) \to (\rho_1\rho_2^{-1}\rho_1 \subset \rho_1). \tag{A}$$

С другой стороны, замечая, что $(\rho_1\rho_2^{-1}\rho_1 = \rho_1) \longleftrightarrow (\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1^{-1} = \rho_1^{-1})$ и $(\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1^{-1} = \rho_1^{-1}) \to (\rho_1\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1^{-1}\rho_1 = \rho_1\rho_1^{-1}\rho_1)$, мы получаем, согласно (4), $(\rho_1\rho_2^{-1}\rho_1 = \rho_1) \to (\rho_1 = \rho_1\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1^{-1}\rho_1)$. Далее, применяя (3), получаем $\rho_1\rho_1^{-1}\rho_2\rho_1^{-1}\rho_1 \subset \rho_2$, откуда окончательно

$$(\rho_1\rho_2^{-1}\rho_1 = \rho_1) \to (\rho_1 \subset \rho_2). \tag{B}$$

Из формул (A) и (B) вытекает (5).

Пользуясь (5), мы легко выводим, что элементы $\mathfrak{M}(A \times A)$ удовлетворяют формуле

$$(\rho_2 = \rho_1^{-1}) \longleftrightarrow \{(\rho_1\rho_2\rho_1 = \rho_1)\cdot(\rho_2\rho_1\rho_2 = \rho_2)\}. \tag{6}$$

Наконец, из (5) и (6) получаем

$$(\rho_1 \subset \rho_2) \longleftrightarrow (\exists\rho)\,\{(\rho_1\rho\rho_1 = \rho_1)\cdot(\rho_2\rho\rho_2 = \rho_2)\cdot(\rho\rho_2\rho = \rho)\}. \tag{7}$$

Из того, что любые элементы $\mathfrak{M}(A \times A)$ удовлетворяют (6) и (7), следует теорема:

Теорема. *Для подгруппы $\mathfrak{M}(A \times A)$ всех взаимно-однозначных частичных преобразований множества A, а также для любой ее симметричной подполугруппы каноническое симметричное преобразование и отношение порядка выражаются с помощью операции умножения преобразований.*

Важность этой теоремы состоит в том, что из нее следует, что абстрактная теория симметричных полугрупп взаимно-однозначных частичных преобразований, рассматриваемых как множества, в которых кроме алгебраической операции заданы отношение порядка и симметричное преобразование, сводится к изучению некоторого специального класса абстрактных полугрупп.

Нетрудно убедиться, что множество всех идемпотентных элементов $\mathfrak{M}(A \times A)$ совпадает с $\mathfrak{P}(\Delta_A)$. Таким образом, каждый идемпотентный элемент является диагональю Δ_B произведения $B \times B$, где $B \subset A$ — некоторое подмножество, и определяет тождественное преобразование этого подмножества. Если $\rho \subset A \times A$ — произвольное бинарное отношение, то верны формулы:

$$\rho\Delta_B = (B \times A) \cap \rho, \quad \Delta_B\rho = (A \times B) \cap \rho, \quad \Delta_B\rho\Delta_B = (B \times B) \cap \rho. \tag{8}$$

Полное тождественное преобразование Δ_A является двухсторонне, единицей $\mathfrak{M}(A\times A)$. Пусть T — некоторая симметричная подполугруппа не содержащая Δ_A. Если T имеет левую (правую) единицу, то она будучи идемпотентным элементом $\mathfrak{M}(A\times A)$, является некоторым частичным тождественным преобразованием Δ_B, где $B\subset A$. В силу симметричности T и того, что $\Delta_B^{-1}=\Delta_B$, отсюда следует, что Δ_B будет двухсторонней единицей в T. Пользуясь (8), получаем для всех $\tau\in T$ $\tau\subset B\times B$, что означает, что T можно рассматривать как симметричную подполугруппу полугруппы $\mathfrak{M}(B\times B)$, содержащую полное тождественное преобразование.

Пусть T — произвольная симметричная подполугруппа в $\mathfrak{M}(A\times A)$, содержащая единицу Δ_B. Тогда обратимые слева элементы $\tau\in T$ будут преобразованиями, определенными на B, т. е. $pr_1\tau=B$, а обратимые справа будут преобразованиями, переводящими подмножество, на котором они определены, в B, т. е. $pr_2\tau=B$. Они будут определяться соответственно формулами

$$\tau^{-1}\tau=\Delta_B,\quad \tau\tau^{-1}=\Delta_B. \tag{9}$$

Подгруппа двухсторонне обратимых элементов T будет состоять из всех входящих в T преобразований множества B на самого себя. В частности, подгруппа обратимых элементов из $\mathfrak{M}(A\times A)$ будет являться группой $\mathfrak{S}(A\times A)$ всех взаимно-однозначных полных преобразований множества A, т. е. его отображений на себя.

Пусть $T\subset\mathfrak{M}(A\times A)$ — произвольное множество частичных преобразований в A. Множество $\Delta_B T\Delta_B$, состоящее из всех преобразований вида $\Delta_B\tau\Delta_B$, где $\tau\in T$, а $B\subset A$ — некоторое фиксированное подмножество, называется двухсторонним ограничением T относительно подмножества B. В силу (8), очевидно, $\Delta_B T\Delta_B\subset\mathfrak{M}(B\times B)$. Множество T называется полным, если оно не совпадает ни с каким своим двухсторонним ограничением относительно собственного подмножества B.

Назовем множество T мажорантно мультипликативно замкнутым, если произведение любых двух преобразований из T включается в некоторое преобразование из T, причем само оно может и не принадлежать T. Из формул

$$(\Delta_B\tau_2\Delta_B)(\Delta_B\tau_1\Delta_B)=\Delta_B\tau_2\Delta_B\tau_1\Delta_B\subset\Delta_B\tau_2\tau_1\Delta_B,\quad (\Delta_B\tau\Delta_B)^{-1}=\Delta_B\tau^{-1}\Delta_B \tag{10}$$

мы получаем, что мажорантно мультипликативная замкнутость, так же как и симметричность T, являются свойствами, сохраняющимися при любом двухстороннем ограничении T. В противоположность этому мультипликативная замкнутость T, т. е. то, что T — подполугруппа, может не сохраниться при двухстороннем ограничении T.

Теорема. *Двухсторонним ограничением группы $\mathfrak{S}(A\times A)$ относительно подмножества $B\subset A$, равномощного его дополнению $B'=A\setminus B$, является полугруппа $\mathfrak{M}(B\times B)$.*

Доказательство. Пусть $\theta\in\mathfrak{M}(B\times B)$. Рассмотрим подмножества $pr_1\theta'=B\setminus pr_1\theta$ и $pr_2\theta'=B\setminus pr_2\theta$, различая два случая:

Первый случай. $pr_1\theta'$ и $pr_2\theta'$ имеют одинаковую мощность (это всегда будет, если B конечное множество). Очевидно, что существуют такие частичные преобразования $\chi\in\mathfrak{M}(A\times A)$, $\sigma\in\mathfrak{M}(A\times A)$, что $pr_1\chi=B$, $pr_2\chi=B'$, $pr_1\sigma=pr_1\theta'$, $pr_2\sigma=pr_2\theta'$. Нетрудно доказать, что объединение $\theta\cup\chi\Delta_{pr_1\theta'}\cup\sigma\chi^{-1}\cup\Delta_{\chi(pr_1\theta)}$ будет преобразованием из $\mathfrak{S}(A\times A)$, двухстороннее ограничение которого относительно B совпадает с данным преобразованием θ.

Второй случай. $pr_1\theta'$ и $pr_2\theta'$ имеют различную мощность. Предположим, что мощность $pr_1\theta'$ больше мощности $pr_2\theta'$. В противоположном случае мы вместо θ будем рассматривать θ^{-1} и, доказав, что θ^{-1} является двухсторонним ограничением некоторого преобразования из $\mathfrak{S}(A \times A)$, согласно второй из формул (10), докажем, что тем же свойством обладает и само θ. Так как теперь B обязательно бесконечно, то мы можем разбить B' на счетное множество подмножеств B_i $(i=1, 2, \ldots)$, равномощных множеству B. Очевидно, что существуют частичные преобразования $\chi_i \in \mathfrak{M}(A \times A)$, $\sigma \in \mathfrak{M}(A \times A)$ такие, что $pr_1\chi_i = B$; $pr_2\chi_i = B_i$, $pr_1\sigma \subset pr_1\theta'$, $pr_2\sigma = pr_2\theta'$.

Можно доказать, что объединение

$$\theta \cup \chi_1 \Delta_{pr_1\theta'} \cup \sigma\chi_1^{-1} \cup \Delta_{\chi_1(pr_1\theta)} \cup$$

$$\cup \left(\bigcup_{i \in N} \chi_{i+1}\chi_i^{-1} \Delta_{\chi_i (pr_1(\theta \cup \sigma)')} \right) \cup \left(\bigcup_{i \in N} \Delta_{\chi_{i+1}(pr_1(\theta \cup \sigma))} \right),$$

где N — множество всех натуральных чисел и $pr_1(\theta \cup \sigma)' = B \setminus (pr_1\theta \cup pr_1\sigma)$, будет преобразованием из $\mathfrak{S}(A \times A)$, двухстороннее ограничение которого относительно B совпадает с данным преобразованием θ. Таким образом получаем, что $\mathfrak{M}(B \times B) \subset \Delta_B \mathfrak{S}(A \times A) \Delta_B$; с другой стороны, очевидно, что $\Delta_B \mathfrak{S}(A \times A) \Delta_B \subset \mathfrak{M}(B \times B)$, откуда $\Delta_B \mathfrak{S}(A \times A) \Delta_B = \mathfrak{M}(B \times B)$, и, следовательно, теорема доказана.

Поступило
20 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Riguet, Bull. Soc. Math. France, 76, 114 (1948). [2] N. Burbaki, Théorie des ensembles, 1939.