

А. КОМПАНЕЕЦ

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОЛЯ К ЯДРУ

(Представлено академиком Н. Н. Семеновым 14 V 1952)

Метод самосогласованного поля впервые применялся к объяснению строения ядра Вейцекером (1). В последнее время, в связи с развитием учения об ядерных оболочках, возрос интерес к методу самосогласованного поля применительно к ядру. Д. Д. Иваненко применял метод Томаса — Ферми к объяснению магических чисел (2).

В настоящей статье будет показано, что метод самосогласованного поля может в самых общих, грубых чертах объяснить некоторые основные закономерности в строении ядер: приближенное постоянство энергии и объема, приходящихся на один нуклон. Ввиду того что ряд постоянных, относящихся к ядерным силам, неизвестен, мы будем вести доказательство так, чтобы возможно меньше прибегать к конкретным численным значениям величин.

Мы примем, что потенциал взаимодействия нуклонов в ядре подчиняется уравнению типа Юкава

$$\Delta\varphi - \alpha^2\varphi = -4\pi gn. \quad (1)$$

Здесь  $g$  — нуклонный заряд, имеющий размерность обычного заряда;  $n$  — плотность ядерной материи;  $\varphi$  — потенциал;  $\alpha$  — обратный радиус действия ядерных сил. В начале координат, не являющемся, очевидно, особой точкой, надо потребовать, чтобы

$$\frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (2)$$

Границу ядра мы определим условием  $n = 0$ . В этой точке потенциал должен плавно сопрягаться с решением для пустого пространства, имеющим вид  $\varphi \sim e^{-\alpha r}/r$ . Отсюда получаем второе граничное условие

$$\left(\frac{d}{dr} \ln r\varphi\right)_{n=0} = -\alpha. \quad (3)$$

Вычислим теперь полную энергию взаимодействия нуклонов, учитывая, что силы имеют частично обменный характер. Для примера возьмем, что половина сил не связана с обменом, а половина сил — обменные. Координатная часть энергии взаимодействия между парой нуклонов будет браться в виде

$$U_{12} = -g^2 \frac{e^{-\alpha|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}, \quad (4)$$

а обменный оператор мы запишем так (см., например, (3), стр. 106):

$$M = \frac{[1 + (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2)] [1 + (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2)]}{4}. \quad (5)$$

Здесь  $\vec{\sigma}_1$  и  $\vec{\sigma}_2$  — операторы спина обоих нуклонов,  $\vec{\tau}_1$  и  $\vec{\tau}_2$  — операторы

их изотопического спина. Так как спин и заряд каждого нуклона могут принимать два значения, в системе из двух нуклонов может быть 16 волновых функций. Все эти функции следует выбирать антисимметричными относительно перестановки нуклонов. Мы выбирали волновые функции всегда в виде произведения трех множителей: пространственного, спинового и зарядового. В 15 функциях антисимметричен один из трех сомножителей, а в одной функции антисимметричны все три. Пространственную волновую функцию мы выберем в виде плоской волны. Так как потенциал оказывается почти постоянным и, во всяком случае, меняется очень плавно, пользование плоскими волнами для вычисления обменного интеграла, во всяком случае, здесь более оправдано, чем у атома, как это делал Дирак (см. (4), § 2). Благодаря плавному ходу плотности мы отбросили и поправку Вейцекера на  $\nabla l$  ((4), § 12).

Вычисление диагонального матричного элемента энергии взаимодействия, после суммирования по 16 состояниям, в безобменной части дает  $16I - 4B$ , где  $I$  — обычная энергия, вычисленная через плотности нуклонов,  $B$  — обменный интеграл. Обменная часть дает  $4I - 16B$ . Полусумма этих величин равна  $10I - 10B$ . Таким образом, на каждые 16 состояний двух нуклонов приходится по 10 величин  $I$  и  $B$ .

Энергию взаимодействия нуклонов следует проинтегрировать по всем возможным импульсам, от нуля до граничного импульса фермиевского распределения. Как только что было указано, выражение энергии взаимодействия имеет следующий вид:

$$U = -10 \frac{1}{2} \iint \frac{d\mathbf{p}_1 d\mathbf{p}_2}{(2\pi\hbar)^6} \iint \left\{ \psi_1(1) \psi_2(2) U_{12} \bar{\psi}_1(2) \bar{\psi}_2(1) - |\psi_1(1)|^2 |\psi_2(2)|^2 U_{12} \right\} d\nu_1 d\nu_2. \quad (6)$$

Множитель 10 впереди связан, конечно, с тем, что мы приняли равные доли обычных и обменных сил. Подставляя плоские волны для  $\psi_1$ ,  $\psi_2$  и выражение (4) для  $U_{12}$ , получим после элементарного интегрирования ( $q$  — граничный импульс, умноженный на  $1/\hbar\alpha$ ):

$$U = \frac{5g^2\alpha^4}{16\pi^3} \int d\nu \left\{ \left[ \frac{(2q)^2}{2} + \frac{1}{6} \right] \ln(1 + 4q^2) + \frac{(2q)^4}{4} - \frac{(2q)^2}{6} - \frac{2(2q)^3}{3} \operatorname{arctg} 2q \right\} - \frac{5}{16} g \int n\varphi d\nu. \quad (7)$$

Кинетическая энергия, как обычно в методе Томаса—Ферми, равна:

$$E_{\text{кин}} = \frac{\hbar^2\alpha^5}{5\pi^2 m} \int q^5 d\nu. \quad (8)$$

При этом было учтено, что вес состояния нуклона с данным импульсом равен 4, а не 2, как у электрона.

Надо потребовать минимума  $E_{\text{кин}} + U$  при дополнительном условии

$$A = \int n d\nu = \frac{2\alpha^3}{3\pi^2} \int q^3 d\nu = \text{const}, \quad (9)$$

выражающем постоянство полного числа нуклонов. Умножая (9) на некоторый параметр  $\mu$ , который имеет физический смысл работы удаления одного нуклона из ядра ( $\mu = -\frac{\partial(E_{\text{кин}} + U)}{\partial A}$ ), прибавляя  $\mu A$  к  $(E_{\text{кин}} + U)$  и варьируя по  $q$ , получаем условие, связывающее между собой потенциал  $\varphi$  и граничный импульс  $q$ :

$$\frac{\alpha^5 h^2}{\pi^2 m} q^4 + \frac{2\alpha^3}{\pi^2} \mu q^2 - \frac{5}{4} \frac{\alpha^3}{\pi^2} g q^2 \varphi + \frac{5}{8\pi^3} g^2 \alpha^4 (2q)^3 \left\{ 1 + \frac{\ln(1+4q^2)}{4q^2} - \frac{1}{q} \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2q \right\} = 0. \quad (10)$$

Это уравнение и должно решаться вместе с (1) при граничных условиях (2), (3).

Введем следующие безразмерные переменные:

$$\varphi = \frac{8g\alpha}{3\pi} \lambda^3 \Phi; \quad \mu = \frac{5}{3\pi} g^2 \alpha \lambda^3 M; \quad q = \lambda Q; \quad \lambda = \frac{3\pi}{10} \frac{h^2 \alpha}{m g^2}; \quad r = \frac{\xi}{\alpha}. \quad (11)$$

Тогда система уравнений примет следующий вид:

$$\Delta \Phi - \Phi = -Q^3, \quad (12)$$

$$\Phi - M = Q^2 + \frac{3}{2} \frac{Q}{\lambda^2} f(2Q\lambda), \quad (13)$$

причем функция  $f$  определена, согласно (10), так:

$$f(s) = 1 + \frac{\ln(1+s^2)}{s^2} - \frac{2}{s} \operatorname{arc} \operatorname{tg} s. \quad (14)$$

Перейдем к исследованию получившейся системы. В основной части ядра потенциал, а следовательно, и граничный импульс должны быть почти постоянными. Поэтому удобно исходить, как из нулевого приближения, из бесконечно протяженной ядерной материи. Для нее  $\Delta \Phi = 0$  и ее состояние определяется «химическим потенциалом»  $M$  с помощью двух уравнений:

$$\Phi_0 = Q_0^3, \quad (15)$$

$$\Phi_0 - M = Q_0^2 + \frac{3}{2} \frac{Q_0}{\lambda^2} f(2Q_0\lambda). \quad (16)$$

Пусть в средней части ядра  $\Phi$  и  $Q$  мало отличаются от  $\Phi_0$  и  $Q_0$ . Положим  $\Phi = \Phi_0 + \Phi'$ ,  $Q = Q_0 + Q'$ , где  $\Phi'$  и  $Q'$  считаются малыми. Для них получается система линейных уравнений, которая после исключения  $Q'$  приобретает вид:

$$\Delta \Phi' = \left( 1 - \frac{3Q_0^2}{2Q_0 + \frac{3}{2\lambda^2} j(2Q_0\lambda)} \right) \Phi', \quad (17)$$

где функция  $j$  дается равенством:

$$j(s) = 1 - \frac{\ln(1+s^2)}{s^2}. \quad (18)$$

Множитель при  $\Phi'$  в правой части может быть как положительным, так и отрицательным. Если он отрицателен, решение имеет осциллирующий характер. Тогда, следовательно,  $\Phi'$  не имеет тенденции к возрастанию по мере удаления от центра ядра. Иначе говоря, плотность везде будет близка к плотности бесконечной ядерной материи и нигде не обратится в нуль. Итак, если выражение, стоящее в скобке, отрицательно, нельзя получить решение, близкое к постоянному в середине ядра и приводящее в то же время к конечным размерам ядра.

Отсюда сразу видно значение обменного члена в энергии взаимодействия. Без него скобка отрицательна при всех  $Q_0 > \frac{2}{3}$ . Но при  $Q_0 < 1$  и без обменного члена оказывается отрицательной «работа выхода»  $M$ , что, очевидно бессмысленно. Вообще без обменного члена нельзя получить из решения системы (12)—(13) ничего, напоминающего свойства ядер.

Если величина в скобке положительна, решение имеет экспоненциально возрастающий характер, поскольку вблизи начала координат оно обязано, согласно (2), иметь вид  $\Phi' \xi = C \operatorname{sh} a \xi$ , где  $a^2$  — указанная величина в скобке. Поэтому при сколь угодно малом начальном отклонении  $\Phi$  от  $\Phi_0$  поправка  $\Phi'$  станет сравнима с  $\Phi_0$ , если отойти достаточно далеко от начала. Конечно, тогда уже нужно пользоваться точной системой (12)—(13). Но если начальное значение  $\Phi'$  было отрицательно, то величина  $Q'$  тоже отрицательна. Поэтому плотность материи в какой-то точке обращается в нуль, и ядро получает конечные размеры. Разумеется, мы не можем при заданном значении  $M$  распоряжаться начальным значением  $\Phi'$  по произволу: оно должно быть выбрано так, чтобы при обращении  $Q$  в нуль выполнялось условие (3). Но из-за экспоненциального характера решения для  $\Phi'$  уже малые изменения  $M$  будут приводить к изменению радиуса ядра в 2—3 раза. Поэтому окажется, что энергия связи ядра и его объем будут приближенно линейны в зависимости от атомного веса, ибо в своей основной части ядро близко по состоянию к бесконечно протяженной ядерной материи. Это состояние является нулевым приближением к задаче и отвечает, как указывалось, близким значениям химического потенциала, а поэтому при разных радиусах и атомных весах различается мало.

Из того условия, чтобы выражение в скобках в (18) было положительным, и из (16) вытекают два неравенства:

$$M\lambda^3 \leq \frac{1}{16} \left\{ 3s \left[ 1 - \frac{3}{s^2} \ln(1 - s^2) + \frac{2}{s} \operatorname{arc} \operatorname{tg} s \right] - s^3 \right\} \equiv \frac{1}{16} \Psi(s), \quad (19)$$

$$\lambda \leq \frac{3}{4} s - \frac{2}{s} \left[ 1 - \frac{1}{s^2} \ln(1 + s^2) \right] \equiv \chi(s). \quad (20)$$

По отношению к константе связи они действуют в противоположные стороны и могут быть записаны так:

$$\frac{g^2}{\hbar c} \geq \frac{48\pi}{5\Psi(s)} \frac{\mu}{mc^2} \frac{m}{m_0}; \quad \frac{g^2}{\hbar c} \leq \frac{3\pi}{10\chi(s)} \frac{m_0}{m}. \quad (21)$$

Здесь  $m_0$  — масса мезона, передающего силу, равная  $\hbar a/c$ , и  $\mu$  — химический потенциал, который по порядку величины равен 10 Мэв. Исключая отсюда константу связи, приходим к неравенству для массы мезона:

$$\frac{m_0}{m} > \sqrt{32 \frac{\mu}{mc^2} \frac{\chi(s)}{\Psi(s)}}. \quad (22)$$

В интервале значений  $0 < s < 0,5$  отношение  $\chi(s)/\Psi(s)$  составляет около  $1/3$ , так что получается неравенство  $m_0 > m/3$ , не слишком грубое, если учесть характер приближений.  $s = 0,5$  отвечает константа связи  $g^2/\hbar c \sim 6,5$ , т. е. «сильная связь»\*.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить благодарность Я. Б. Зельдовичу и В. Л. Гинзбургу за ценные дискуссии.

Поступило  
28 III 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. F. Weizsäcker, Zs. f. Phys., 96, 431 (1935). <sup>2</sup> Д. Иваненко и В. Родичев, ДАН, 70, 605 (1950). <sup>3</sup> Г. Бете, Лекции по теории ядра, М., 1949. <sup>4</sup> П. Гомбаш, Статистическая теория атома и ее применения, М., 1951.

\* При чисто обменных силах можно выбрать  $\frac{g^2}{\hbar c} \sim \frac{m_0}{m} \sim \frac{1}{6}$ .