

Н. В. ТЯБИН

**ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ ЖИДКОЙ ДИСПЕРСНОЙ
СИСТЕМЫ В ДИФFUЗОРЕ И ПОГРУЖЕНИЕ КЛИНА
В ДИСПЕРСНУЮ СИСТЕМУ**

(Представлено академиком П. А. Ребиндером 8 IV 1952)

Среди многочисленных проблем течения жидких вязко-пластических дисперсных систем до сих пор теоретически не рассмотрены проблемы течения вязко-пластической дисперсной системы в диффузоре и погружения клина в дисперсную вязко-пластическую жидкую среду, хотя имеется большой опытный материал по исследованию подобных процессов течения.

М. П. Волярович и Н. В. Лазовская⁽¹⁻³⁾ исследовали течение солидола и торфомассы в конических насадках методом просвечивания рентгеновскими лучами и установили опытную формулу течения торфа в конусах. П. А. Ребиндер с сотр.^(4, 5) разработали метод погружения конуса для исследования структурно-механических свойств дисперсных систем. Полученные ими опытные данные по погружению конусов дают руководящие указания для теоретического решения вопроса.

Рассмотрим течение вязко-пластической жидкой дисперсной системы в диффузоре. Разберем сначала плоскую задачу, т. е. предположим, что между двумя плоскими стенками, наклоненными под углом α , происходит радиальное течение среды (рис. 1). Общие уравнения реологии вязко-пластической среды в жидком состоянии, установленные автором⁽⁶⁾, записываются:

$$\rho(F - W) - \nabla p + \tau_{пл} \nabla V + \nabla \bar{\Theta} = 0, \quad \nabla V = 0, \quad (1)$$

где ρ — плотность, F — внешняя сила, W — ускорение, p — давление, $\tau_{пл}$ — пластическая вязкость, V — скорость, $\bar{\Theta}$ — тензор предельных напряжений.

Записывая уравнения (1) в цилиндрических координатах, в данном случае течения имеем: $V_r = f(r, \theta)$, $V_\varphi = V_z = 0$, $F = 0$; так как течение достаточно медленное и стационарное, то $W = 0$; из компонент $\bar{\Theta}$ не равна нулю, $\theta_{\varphi r} = \theta = \text{const}$ в области течения. При таких условиях уравнения (1) упростятся и будут:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \tau_{пл} \left(\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r^2} \right) = 0; \quad (2)$$

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + 2\tau_{пл} \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{V}{r} = 0. \quad (4)$$

На основании (4) упростим уравнение (2); получим:

$$-\frac{\partial p}{\partial r} + \eta_{\text{пл}} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = 0. \quad (5)$$

Из (4) $rV(r, \varphi) = U(\varphi)$, т. е. предполагаем, что расстояние от начала координат единичное. Уравнение (3) после интегрирования дает $p = \frac{2\eta_{\text{пл}}}{r^2} U + f(r)$. Подставляя значение $\partial p / \partial r$ в (5), найдем, что $\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + 4U = \frac{f'(r)r^3}{\eta_{\text{пл}}}$. Так как левая часть не зависит от φ , то

$$\frac{d^2 U}{d\varphi^2} + 4U = C_3. \quad (6)$$

Интегрируя уравнение (6), получим общее решение:

$$U = C_1 \cos 2\varphi + C_2 \sin 2\varphi + \frac{C_3}{4}, \quad (7)$$

где C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные, определяемые из граничных условий. Течение осесимметрично, граничные условия возьмем в области положительных углов φ . Считаем, что среда прилипает к стенке, т. е. при $\varphi = \alpha/2$ $U = 0$.

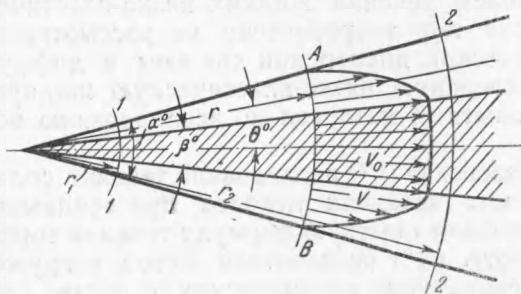


Рис. 1

Как показали опыты Н. В. Лазовской⁽²⁾ методом просвечивания рентгеновскими лучами, движение отдельных свинцовых реперов, заложенных в дисперсную среду, происходит вдоль радиусов, проведенных из вершины конуса, т. е. линии-ми тока являются радиусы

диффузора. Поэтому зоной, которая движется с постоянной скоростью как сплошное тело, является сектор, образованный гранями угла β (рис. 1). Тогда внутреннее граничное условие на поверхности предельного напряжения сдвига: при $\varphi = \beta/2$ $\partial U / \partial \varphi = 0$. Наконец, должно соблюдаться условие постоянства секундного расхода q через

все поперечные сечения диффузора, т. е. $q = 2 \int_0^{\beta/2} U_0 d\varphi + 2 \int_{\beta/2}^{\alpha/2} U(\varphi) d\varphi$,

где U_0 — радиальная скорость течения сплошного тела в центре диффузора $U_0 = U(\beta/2)$. Из граничных условий получаем систему уравнений:

$$C_1 \cos \alpha + C_2 \sin \alpha + \frac{C_3}{4} = 0, \quad C_1 \sin \beta - C_2 \cos \beta = 0,$$

$$C_1 (\sin \alpha - \sin \beta + \beta \cos \beta) - C_2 (\cos \alpha - \cos \beta - \beta \sin \beta) + \frac{\alpha C_3}{4} - q = 0.$$

Определяя постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3 и подставляя их в (7), найдем:

$$U = q \frac{1}{r} \frac{\cos(2\varphi - \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\beta + \sin(\alpha - \beta) - \alpha \cos(\alpha - \beta)}.$$

Для закона распределения скорости при течении дисперсной среды в плоском диффузоре получим выражение:

$$V(r, \varphi) = \frac{q}{r} \frac{\cos(2\varphi - \beta) - \cos(\alpha - \beta)}{\beta + \sin(\alpha - \beta) - \alpha \cos(\alpha - \beta)}. \quad (8)$$

Угол β определится из условия сил, действующих на грани сплошного твердого сектора в центре диффузора:

$$(p_1 r_1 - p_2 r_2) \beta = 2\theta (r_2 - r_1),$$

где p_1 и p_2 — давления, r_1 и r_2 — радиусы 1—1 и 2—2, θ — предельное напряжение сдвига.

Средняя скорость течения определится:

$$V_{cp} = \frac{q}{\alpha r} \frac{\sin \alpha - \alpha \cos(\alpha - \beta)}{\beta + \sin(\alpha - \beta) - \alpha \cos(\alpha - \beta)}.$$

Предположим теперь, что плоский клин, образованный двумя плоскостями, наклоненными одна к другой под углом α , погружается под действием силы F со скоростью V_0 в вязко-пластическую жидкую дисперсную систему. Как показали П. А. Ребиндер и сотр. (4, 5), при погружении конуса вдоль его боковой поверхности происходит течение дисперсной системы. Поэтому мы считаем, что при погружении плоского клина происходит течение среды вдоль граней клина. Погружение клина стационарное и медленное, течение среды происходит в радиальном направлении, и дифференциальными уравнениями течения среды будут уравнения (2), (3) и (4). Интегралом этих уравнений будет выражение (7). Постоянные интегрирования определим из граничных условий для одной из граней осесимметричного клина. Среда прилипает к клину, т. е. при $\varphi = \alpha/2$ $U = U_0$, где $U_0 = V_0 r \cos \alpha/2$. Хотя вдоль граней клина происходит радиальное течение, но зона течения распространяется только до угла $\beta/2$, остальная область дисперсной среды остается неподвижной. На поверхности предельного напряжения сдвига имеем условия $dU/d\varphi = 0$ при $\varphi = \beta/2$ и $U = 0$ при $\varphi = \beta/2$. На основании граничных условий получаем три уравнения:

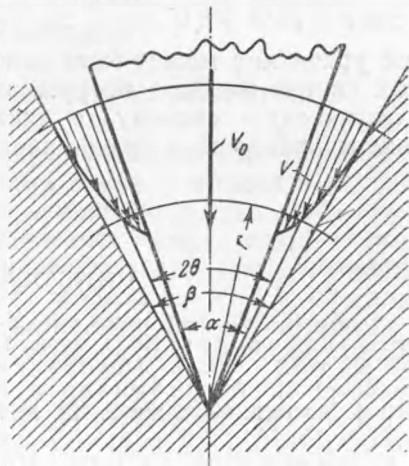


Рис. 2

$$C_1 \cos \alpha + C_2 \sin \alpha + \frac{C_3}{4} = U_0, \quad C_1 \sin \beta - C_2 \cos \beta = 0,$$

$$C_1 \cos \beta + C_2 \sin \beta + \frac{C_3}{4} = 0.$$

Определяя C_1 , C_2 , C_3 , получим (7) в виде:

$$U = U_0 \frac{\cos(\beta - 2\varphi) - 1}{\cos(\beta - \alpha) - 1}.$$

Закон распределения скоростей около погружающегося в среду плоского клина будет:

$$V = V_0 \cos \frac{\alpha}{2} \frac{\cos(\beta - 2\varphi) - 1}{\cos(\beta - \alpha) - 1} \quad (9)$$

(профиль CD).

Угол β , до которого распространяется течение дисперсной системы, определится из условия равновесия сил. На поверхности предельного

напряжения сдвига касательное напряжение равно предельному напряжению сдвига θ , т. е. $F \cos \frac{\beta}{2} \frac{1}{r} = 2\theta$, а $\beta = 2 \arccos \frac{2\theta r}{F}$, где r — длина грани клина.

Условие, связывающее кинематические и динамические величины, определим из реологического уравнения состояния вязко-пластической среды. Для рассматриваемого случая течения касательное напряжение равно: $p_{\varphi r} = \theta_{\varphi r} + \frac{\eta_{пл}}{r} \frac{\partial V}{\partial \varphi}$. На поверхности клина $p_{\varphi r} = \theta_{\varphi r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial V}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\alpha/2}$. Определяя $\partial V / \partial \varphi$ из (9), получим:

$$p_{\varphi r} = \theta + \frac{\eta V_0}{2r} \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

Так как вдоль поверхности клина действует сила $\frac{F}{2} \cos \alpha$, то $F \cos \alpha = 2\theta r b + \eta V_0 \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) b$, где b — толщина клина. Последнее уравнение может быть использовано для определения $\eta_{пл}$ дисперсных систем методом погружения плоского клина в дисперсную вязко-пластическую систему, а также для определения силы при резке ножом дисперсных вязко-пластических сред.

Поступило
29 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. П. Воларович и Н. В. Лазовская, ДАН, **76**, № 2 (1951).
- ² Н. В. Лазовская, Колл. журн., **11**, 2 (1949).
- ³ Н. В. Лазовская, Диссертация, М., 1950.
- ⁴ Б. Я. Ямпольский и П. А. Ребиндер, Колл. журн., **10**, № 6 (1948).
- ⁵ П. А. Ребиндер и Н. А. Семененко, ДАН, **64**, № 6 (1949).
- ⁶ Н. В. Тябин, Колл. журн., **13**, № 1 (1951).