Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Г. МИХЛИН

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРОВ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ТЕОРИИ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком В. И. Смирновым 8 IV 1952)

§ 1. Пусть H — гильбертово пространство и A — положительный [1] в H самосопряженный оператор. Построим новое гильбертово пространство H_A как замыкание области* $D(A)$ в метрике

$$[u, v] = (Au, v); \quad \| u \|^2 = (Au, u). \tag{1}$$

Некоторые из идеальных элементов пространства H_A можно отождествить с подходящим образом выбранными элементами из H. Именно, если u_0 — идеальный элемент пространства H_A и существует такая последовательность $u_n \in D(A)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - u_0 \| = 0, \qquad \lim_{m,\, n\to\infty} \| u_n - u_m \| = 0,$$

то мы отождествим u_0 с пределом, к которому стремится последовательность $\{u_n\}$ в метрике пространства H. Можно доказать, что такой закон позволяет отождествить u_0 не более, чем с одним элементом пространства H. Если оператор A — положительно определенный, то, как известно, все элементы H_A указанным способом отождествляются с некоторыми элементами из H [1].

Теорема 1. *Область определения оператора $\sqrt{A}$ совпадает с множеством элементов, общих пространствам H_A и H.*

Пусть A и B — самосопряженные положительные в H операторы, причем: 1) $D(\sqrt{B}) \supset D(\sqrt{A})$; 2) существуют такие постоянные δ' и δ'', что

$$\delta'(Au, u) \leqslant (Bu, u) - (Au, u) \leqslant \delta''(Au, u). \tag{2}$$

Легко доказывается следующая теорема:

Теорема 2. *Спектр оператора $Y = (\sqrt{A^{-1}}\sqrt{B})(\sqrt{B}\sqrt{A^{-1}}) - J$, предварительно расширенного до самосопряженного, заключен в отрезке (δ', δ'').*

Через J обозначен тождественный оператор.

§ 2. Рассмотрим уравнение

$$Bu = f, \quad f \in H, \tag{3}$$

которое будем считать разрешимым, так что $f \in D(B^{-1})$. Примем также, что $f \in D(A^{-1})$, так что разрешимо и уравнение

$$Au_0 = f. \tag{4}$$

Оценим погрешность в решении, проистекающую от замены уравнения (3) на (4). Положим в (3) $u = \sqrt{A^{-1}}\,v$ и умножим полученное уравнение слева на $\sqrt{A^{-1}}$. Мы придем тогда к уравнению

---

* Если K — некоторый оператор в H, то символом $D(K)$ мы обозначаем область задания оператора K.

$$(J+Y)\,v = v_0; \quad v_0 = \sqrt{A^{-1}}\,f. \tag{5}$$

Допустим, что $\delta' > -1$. Тогда существует оператор $(J+Y)^{-1}$, и

$$\|(J+Y)^{-1} - J\| \leqslant \max\left(\frac{|\delta'|}{1+\delta'},\ \frac{|\delta''|}{1+\delta''}\right) = \eta.$$

Теперь из (5) легко следует

$$\|v - v_0\| \leqslant \eta \|v_0\|. \tag{6}$$

Если заменить в (6) v и v_0 через $\sqrt{A}u$ и $\sqrt{A}u_0$, то получится искомая оценка:

$$|u - u_0| \leqslant \eta |u_0|. \tag{7}$$

Заметим, что уравнения (3) и (4) во всяком случае разрешимы, если оператор A — положительно-определенный и $\delta' > -1$.

§ 3. Если $|\delta'| < 1$ и $|\delta''| < 1$, то $\|Y\| < 1$, и уравнение (5) разрешимо по методу последовательных приближений, которые можно строить хотя бы по формулам

$$v_0 = \sqrt{A^{-1}}\,f, \quad v_n = v_0 - Yv_{n-1}$$

и которые сходятся в метрике пространства H как прогрессия со знаменателем $\delta = \max(|\delta'|, |\delta''|)$.

Пусть оператор A — положительно-определенный. Положим $u_n = \sqrt{A^{-1}}\,v_n$. Тогда ряд

$$u_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n-1}) \tag{8}$$

сходится к решению уравнения (3) в метрике пространства H как прогрессия со знаменателем δ. В частности, если $D(B) \supset D(A)$, то сходимость ряда (8) означает следующее: уравнение (3) разрешимо по методу последовательных приближений, которые можно строить как решения уравнений $Au_0 = f$, $Au_n = f - (B - A)\,u_{n-1}$; указанные приближения сходятся в метрике (1) как прогрессия, знаменатель которой равен δ.

§ 4. Из ряда задач, к которым можно применить перечисленные выше результаты, мы остановимся на вопросах, связанных с теорией упругих оболочек. Мы будем исходить из тех уравнений, которые В. З. Власов [2] называет «уравнениями технической теории оболочек», с той только разницей, что в выражениях деформаций мы отбросим члены, пропорциональные квадратам главных кривизн срединной поверхности. Таким образом, в произвольной системе криволинейных координат α_1, α_2, ортогональных на срединной поверхности S оболочки, потенциальная энергия деформации оболочки выражается формулой

$$2Э(\mathbf{w}) = \frac{E}{1-\sigma^2}\iint\limits_S \Big\{ h\left[\varepsilon_{11}^2 + 2\sigma\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{22}^2 + 2(1-\sigma)\,\varepsilon_{12}^2\right] +$$

$$+ \frac{h^3}{12}\left[\varkappa_{11}^2 + 2\sigma\varkappa_{11}\varkappa_{22} + \varkappa_{22}^2 + 2(1-\sigma)\,\varkappa_{12}^2\right]\Big\}\,dS, \tag{9}$$

где $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ — вектор смещений точек срединной поверхности, а величины ε_{ik} и $\varkappa_{ik}$ выражаются через вектор $\mathbf{w}$, коэффициенты Ляме A_1 и A_2 поверхности S и коэффициенты L, M, N второй гауссовой квадратичной формы этой поверхности по формулам:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial w_1}{\partial \alpha_1} + \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_1}{\partial \alpha_2}w_2 - \frac{L}{A_1^2}w_3, \quad \varepsilon_{22} = \frac{1}{A_1A_2}\frac{\partial A_2}{\partial \alpha_1}w_1 + \frac{1}{A_2}\frac{\partial w_2}{\partial \alpha_2} - \frac{N}{A_2^2}w_3,$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left\{\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \alpha_2}\left(\frac{w_1}{A_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial \alpha_1}\left(\frac{w_2}{A_2}\right)\right\} - \frac{M}{A_1A_2}w_3;$$

$$\varkappa_{11} = -\frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_1}\right) - \frac{1}{A_1A_2^2}\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_2},$$

$$\varkappa_{22} = -\frac{1}{A_1^2A_2}\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_1} - \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_2}\right),$$

$$\varkappa_{12} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{1}{A_1^2}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_1}\right) + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{1}{A_2^2}\frac{\partial w_3}{\partial\alpha_2}\right)\right\}.$$

h, E, σ означают, как обычно, толщину оболочки, ее модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Нетрудно было бы написать выражения ε_{ik} и $\varkappa_{ik}$ в неортогональных координатах.

Уравнения равновесия оболочки запишем символически в виде

$$P\mathbf{w} = \mathbf{q}, \tag{10}$$

где $\mathbf{q}$ — нагрузка, действующая на срединную поверхность оболочки. Для простоты примем, что некоторая часть Γ_1 контура срединной поверхности закреплена, а остальная часть либо свободно оперта, либо не подвержена действию внешних усилий.

Допустим, что наша оболочка принадлежит к некоторому семейству оболочек, зависящему от параметра ζ, так что мы будем писать в дальнейшем S_ζ вместо S, и что значению параметра $\zeta = 0$ соответствует плоская пластина S_0. Введем на срединной поверхности S_ζ какие-либо координаты β_1, β_2, которые мы подчиним требованию, чтобы область изменения этих координат для всех поверхностей S_ζ была одна и та же. Пусть E_ζ, F_ζ, G_ζ и L_ζ, M_ζ, N_ζ суть коэффициенты первых двух гауссовых квадратичных форм поверхности S. Мы допускаем, что указанные коэффициенты суть непрерывные функции от β_1, β_2 и ζ; точно так же мы допускаем, что первые производные от E_ζ, F_ζ, G_ζ суть непрерывные функции тех же аргументов. В таком случае, если $\zeta \to 0$, то коэффициенты первой гауссовой формы и их первые производные равномерно стремятся к соответствующим коэффициентам и их первым производным для плоскости, а коэффициенты второй гауссовой формы равномерно стремятся к нулю.

Оператор P для оболочки S_ζ будем обозначать через P_ζ. Как легко видеть, при $\zeta = 0$ оператор P_ζ переходит в оператор P_0, входящий в уравнения равновесия плоской пластины.

Введем в рассмотрение гильбертово пространство векторных функций, определенных в области S_0, с метрикой, задаваемой формулами

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \iint\limits_{S_0} (u_1\bar{v}_1 + u_2\bar{v}_2 + u_3\bar{v}_3)\, dS_0,$$

$$\|\mathbf{u}\|^2 = \iint\limits_{S_0} (|u_1|^2 + |u_2|^2 + |u_3|^2)\, dS_0.$$

Нетрудно доказать, что в этом пространстве оператор P_ζ — положительный, причем

$$(P_\zeta\mathbf{w}, \mathbf{w}) = 2\text{Э}_\zeta(\mathbf{w}). \tag{11}$$

Обозначим через γ наибольший из максимумов величин

$$|E_\zeta - E_0|, \ldots, \left|\frac{\partial G_\zeta}{\partial\beta_2} - \frac{\partial G_0}{\partial\beta_2}\right|, \; |L_\zeta|, \; |M_\zeta|, \; |N_\zeta|.$$

Можно доказать, что

$$\delta' Э_0(\mathbf{w}) \leqslant Э_\zeta(\mathbf{w}) - Э_0(\mathbf{w}) \leqslant \delta'' Э_0(\mathbf{w}), \tag{12}$$

где

$$\delta' = \left(C_1' + \frac{C_2'}{h^2}\right)\gamma, \quad \delta'' = \left(C_1'' + \frac{C_2''}{h^2}\right)\gamma,$$

и $C_1', \ldots, C_2''$ — постоянные, зависящие только от области S_0 и от краевых условий на границе оболочки. Если толщина h оболочки фиксирована, то при достаточно малом ζ величины δ' и δ'' будут сколь угодно малыми, в частности, будет $\delta' > -1$. Далее, области задания операторов $\sqrt{P_\zeta}$ и $\sqrt{P_0}$ совпадают: обе области состоят из векторных функций, квадратично-суммируемых в S_0 вместе с их первыми обобщенными производными и удовлетворяющих на Γ_1 условиям жесткого закрепления.

Допустим, что для упрощения расчета оболочка S_ζ заменена пластиной S_0. В силу формул (7) и (11) погрешность такой замены оценивается неравенством

$$Э_0(\mathbf{w}_\zeta - \mathbf{w}_0) \leqslant \eta Э_0(\mathbf{w}_0), \tag{13}$$

в котором $\mathbf{w}_\zeta$ и $\mathbf{w}_0$ означают смещения в оболочке, соответственно, в пластине, обусловленные действием одной и той же нагрузки $\mathbf{q}$. Неравенство (13) можно трактовать так: *при определении напряжений в оболочке относительная средняя квадратичная погрешность, проистекающая от замены оболочки пластиной, не превосходит величины η, которая сколь угодно мала, если толщина h фиксирована, а величина ζ достаточно мала.*

Если оболочка находится в чисто-моментном состоянии, то δ' и δ'' не зависят от h и имеют вид $\delta' = C_1'\gamma$, $\delta'' = C_1''\gamma$.

В качестве примера рассмотрим оболочку постоянной толщины, имеющую форму части прямого геликоида

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta, \quad z = \zeta\theta, \tag{14}$$

которая в плоскости (x, y) проектируется на часть кругового кольца

$$\rho_0 \leqslant \rho \leqslant \rho_1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0; \tag{15}$$

при $\zeta = 0$ оболочка переходит в плоскую пластину (15). Будем считать, что оболочка находится в чисто-моментном состоянии; примем также, что край $\rho = \rho_0$ закреплен, а остальная часть края свободна. В этом случае величине η можно дать оценку, не зависящую от θ_0. Так например, если $\zeta/\rho_0 = 0{,}25$, $\rho_1/\rho_0 = 2$ и $\sigma = 0{,}30$, то $\eta = 0{,}18$. Таким образом, в данном случае относительная средняя квадратичная погрешность в определении напряжений, возникающая в результате замены геликоидальной оболочки плоской пластиной (15), не превосходит 18%, какова бы ни была нагрузка, действующая на оболочку, и как бы ни был велик угол θ_0.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
3 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Г. Михлин, Прямые методы в математической физике, 1950. [2] В. З. Власов, Общая теория оболочек, 1949.