Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

МЕХАНИКА

М. Ф. ШУЛЬГИН

# ТЕОРЕМА О СВОЙСТВАХ ИНТЕГРАЛОВ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С. А. ЧАПЛЫГИНА

*(Представлено академиком А. И. Некрасовым 11 IV 1952)*

С. А. Чаплыгин [1] указал, что во многих примерах консервативных неголономных систем можно выбрать обобщенные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ так, что ни в коэффициенты $B_{\rho\mu}$ кинематических связей

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho\mu}\dot{q}_\rho \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{1}$$

ни в выражение кинетического потенциала $L_0$, составленного без учета связей (1), координаты $q_1, q_2, \ldots, q_m$ не войдут, и показал, что уравнения движения таких систем могут быть записаны в виде

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial L}{\partial q_\nu} = \Delta_\nu \quad (\nu = m+1, m+2, \ldots, n);$$

$$\Delta_\nu = \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\sigma}\left(\frac{\partial B_{\nu\sigma}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\rho\sigma}}{\partial q_\nu}\right)\dot{q}_\rho, \tag{2}$$

где $L$ обозначает функцию, полученную из $L_0$ исключением зависимых скоростей $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$ при помощи уравнений (1). Уравнения (2), число которых равно числу степеней свободы системы, позволяют независимо от неголономных связей (1) найти $q_\nu(t)$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$, после чего из (1) можно найти остальные координаты $q_\mu$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$.

В настоящей заметке, которая является развитием работ [2], мы устанавливаем теорему о свойствах интегралов динамических уравнений (2) Чаплыгина, аналогичную классической теореме Пуассона.

1. Величины $\dot{q}_\nu$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ мы можем рассматривать как функции обобщенных импульсов $p_\nu = \partial L / \partial \dot{q}_\nu$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ и наоборот.

Положим, что нам известен некоторый первый интеграл $\varphi(t; q_\nu; \dot{q}_\nu) = \mathrm{const}$ уравнений (2). Тогда, если ввести в рассмотрение функцию Гамильтона

$$H(t; q_{m+1}, \ldots, q_n; p_{m+1}, \ldots, p_n) = \sum_{\nu=m+1}^{n} p_\nu \dot{q}_\nu - L,$$

то функция $\varphi$ должна удовлетворять тождественно условию:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho}\dot{q}_\rho + \sum_{\rho,\nu=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_\rho}\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \partial p_\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\nu} + \Delta_\nu\right) \equiv 0. \tag{3}$$

Вводя избыточные переменные $u_\nu$ $(\nu = m+1, \dots, n)$ и полагая

$$K = \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\nu} \dot{u}_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{n} \left( \frac{\partial L}{\partial q_\nu} + \Delta_\nu \right) u_\nu, \tag{4}$$

мы можем заменить систему (2) лагранжевыми уравнениями

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{u}_\nu} - \frac{\partial K}{\partial u_\nu} = 0 \quad (\nu = m+1, \dots, n), \tag{5}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial K}{\partial q_\nu} = 0 \quad (\nu = m+1, \dots, n), \tag{6}$$

в которых последние $n - m$ уравнений служат для определения $u_\nu$.

2. Дополнительная система (6) обладает одним интересным свойством, которое можно формулировать в виде предложения:

*Если* $\varphi(t; q_\nu; \dot{q}_\nu) = \text{const}$ *есть интеграл системы* (2), *то система* (6) *удовлетворяется значениями*

$$u_\nu = \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_\rho} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \, \partial p_\nu} \quad (\nu = m+1, \dots, n). \tag{7}$$

Приведем в основных чертах доказательство этого предложения. Дифференцируя (7) по времени, рассматривая при этом $\dot{q}_\nu$ как функции от $p_\nu$ $(\nu = m+1, \dots, n)$, заменяя $\dot{p}_\nu$ их значениями из уравнений (2), принимая во внимание (3), будем иметь:

$$\dot{u}_\nu = - \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \, \partial p_\nu} - \sum_{\rho,\, k=m+1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \, \partial p_\nu} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q_\rho \, \partial \dot{q}_k} + \frac{\partial \Delta_\rho}{\partial \dot{q}_k} \right) u_\rho \, (\nu = m+1, \dots, n). \tag{8}$$

Заменяя в уравнениях (6) $\dot{u}_\nu$ и $u_\nu$ их выражениями из (8) и (7), выполняя затем дифференцирование по $t$, получим тождества:

$$\frac{\partial}{\partial q_\nu} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho} \dot{q}_\rho + \sum_{\rho,\, k=m+1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho} \frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho \, \partial p_k} \left( \frac{\partial L}{\partial q_k} + \Delta_k \right) \right] \equiv 0 \quad (\nu = m+1, \dots, n).$$

Таким образом, всякому первому интегралу уравнений (2) Чаплыгина соответствует решение (7) дополнительной системы (6).

Отсюда непосредственно вытекает теорема, аналогичная классической теореме Пуассона.

Теорема. *Положим, что известен некоторый первый интеграл:*

$$f(t; q_{m+1}, \dots, q_n; \dot{q}_{m+1}, \dots, \dot{q}_n; u_{m+1}, \dots, u_n; \dot{u}_{m+1}, \dots, \dot{u}_n) = \text{const} \tag{9}$$

*расширенной системы* (5) *и* (6). *Если в этом интеграле заменить избыточные переменные* $u_\nu$ *и* $\dot{u}_\nu$ $(\nu = m+1, \dots, n)$ *их значениями из равенств* (7) *и* (8), *в которых* $\varphi = \text{const}$ *есть интеграл системы* (2) *то равенство* (9) *будет выражать вообще некоторый новый интеграл системы* (2).

Таким образом, зная один интеграл расширенной системы (5) и (6) и один интеграл уравнений (2), возможно найти второй интеграл уравнений (2); комбинируя этот новый интеграл с прежним интегралом расширенной системы, мы получили бы третий интеграл уравнений (2), и т. д.

Следовательно, к динамическим уравнениям Чаплыгина применим метод интеграции, основанный на последовательном применении теоремы, аналогичной теореме Пуассона.

3. Частные случаи. 1) Если $L$ и $\Delta_\nu$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ не зависят явно от $t$, а функция $\varphi(t; q_\nu; \dot q_\nu) = \mathrm{const}$ есть интеграл системы (2), то $\partial\varphi / \partial t = \mathrm{const}$ будет также интегралом этой системы, следовательно, интегралами будут и $\partial^2\varphi / \partial t^2 = \mathrm{const}$, $\partial^3\varphi / \partial t^3 = \mathrm{const}$ и т. д.

Действительно, беря частную производную по $t$ от левой части тождества (3), получим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right) + \sum_{\rho=m+1} \frac{\partial}{\partial q_\rho}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\dot q_\rho + \sum_{\rho,\,\nu=m+1}^{n} \frac{\partial}{\partial \dot q_\rho}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 H}{\partial p_\rho\,\partial p_\nu}\left(\frac{\partial L}{\partial q_\nu} + \Delta_\nu\right) \equiv 0,$$

которое показывает, что $\partial\varphi / \partial t = \mathrm{const}$ есть тоже интеграл системы (2).

2) Если $L$ и $\Delta_\nu$ $(\nu = m+1, \ldots, n)$ не зависят явно от координат $q_k$ $(k = m+1, \ldots, m+s \leqslant n)$, а $\varphi(t; q_{m+1}, \ldots, q_n; \dot q_{m+1}, \ldots, \dot q_n) = \mathrm{const}$ есть интеграл системы (2), то интегралами этой системы будут также и равенства:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q_k} = c_k = \mathrm{const}, \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_k\,\partial q_j} = c_{kj} = \mathrm{const}, \ldots \quad (k, j = m+1, \ldots, m+s). \quad (10)$$

Если же функция $\varphi$ не зависит явно от координат $q_k$ $(k = m+1, \ldots, m+s)$, то равенства (10) уже не будут интегралами системы (2).

Ясно, что система (2) может иметь только $2(n-m)$ независимых друг от друга интегралов, всякий же другой интеграл представляется функцией независимых.

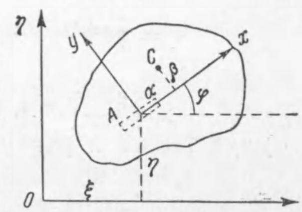

Рис. 1

4. Закончим нашу заметку, дав простой пример применения рассматриваемого здесь метода. В качестве такого примера рассмотрим задачу С. А. Чаплыгина о движении твердого тела параллельно плоскости [3].

Вообразим твердое тело, опирающееся на горизонтальную плоскость тремя точками; две из этих точек представляют свободно скользящие ножки, а третья есть точка $A$ прикосновения острого колесика (см. рис. 1), горизонтальная ось которого неизменно скреплена с телом; допустим, что колесико не может скользить в направлении, перпендикулярном к его плоскости. Положение тела определяем горизонтальными координатами точки $A(\xi, \eta)$ и углом $\varphi$, который составляет ось $Ax$, связанная с телом и лежащая в плоскости колесика, с неподвижной осью $O\xi$. Исследуем движение тела по инерции.

Примем за координаты системы $\xi = q_1$, $\eta = q_2$, $\varphi = q_3$ и $q = q_4$, где $q$ есть длина траектории точки $A$. Тогда связи системы сводятся к двум соотношениям:

$$\dot\xi = \dot q\cos\varphi, \quad \dot\eta = \dot q\sin\varphi. \quad (11)$$

Кинетическая энергия $T_0 = L_0$ определится формулой

$$2T_0 = [\dot\xi - \dot\varphi(\alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi)]^2 + [\dot\eta + \dot\varphi(\alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi)]^2 + k^2\varphi^2, \quad (12)$$

где $k$ — радиус инерции тела (массы $m = 1$) около вертикали, проходящей через его центр тяжести $C$, горизонтальная проекция которого определяется координатами $\alpha$ и $\beta$ по подвижным осям. Далее, находим:

$$2T = 2L = \dot{q}^2 - 2\beta\dot{q}\dot{\varphi} + (\alpha^2 + \beta^2 + k^2)\dot{\varphi}^2, \quad \Delta_3 = -\alpha\dot{\varphi}\dot{q}, \quad \Delta_4 = \alpha\dot{\varphi}^2. \tag{13}$$

Уравнения движения системы в форме Чаплыгина запишутся так:

$$\frac{d}{dt}[-\beta\dot{q} + (\alpha^2 + \beta^2 + k^2)\dot{\varphi}] = -\alpha\dot{\varphi}\dot{q}, \quad \frac{d}{dt}[\dot{q} - \beta\dot{\varphi}] = \alpha\dot{\varphi}^2. \tag{14}$$

Таким образом, имеет место случай, когда $L$ и $\Delta_\nu$ $(\nu = 3, 4)$ не зависят явно от $t$ и координат $q_\nu$ $(\nu = 3, 4)$.

Легко убедиться, что уравнения движения допускают первый интеграл

$$F = \mu(\dot{q} - \beta\dot{\varphi})\sin(\alpha\mu\varphi) - \dot{\varphi}\cos(\alpha\mu\varphi) = C_1 = \text{const}; \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + k^2}}. \tag{15}$$

Применяя к этому интегралу формулу (10), мы получим новый интеграл

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \alpha\mu^2(\dot{q} - \beta\dot{\varphi})\cos(\alpha\mu\varphi) + \alpha\mu\dot{\varphi}\sin(\alpha\mu\varphi) = C_2. \tag{16}$$

Продолжая применение формулы (10) к интегралу (16), найдем еще интегралы, но они являются следствием предыдущих.

Возвращаясь снова к уравнениям (14), можно убедиться, что они допускают первый интеграл

$$\Phi = \dot{\varphi}e^{\alpha\mu^2(q-\beta\varphi)} + \frac{\sqrt{\psi} + \dot{q} - \beta\dot{\varphi}}{\sqrt{\psi} - \dot{q} + \beta\dot{\varphi}}e^{-\alpha\mu^2 t} = \text{const} = C, \tag{17}$$

где $\psi = \dot{q}^2 - 2\beta\dot{\varphi}\dot{q} + (\alpha^2 + \beta^2 + k^2)\dot{\varphi}^2$. Но тогда интегралами уравнений (14) будут также и равенства:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial q} = \alpha\mu^2\dot{\varphi}e^{\alpha\mu^2(q-\beta\varphi)} = C_3, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \alpha\mu^2\frac{\sqrt{\psi} + \dot{q} - \beta\dot{\varphi}}{\sqrt{\psi} - \dot{q} + \beta\dot{\varphi}}e^{-\alpha\mu^2 t} = C_4. \tag{18}$$

Ясно, что пять составленных интегралов (15), (16), (17) и (18) не будут различными. Действительно, легко убедиться, что между этими интегралами имеет место соотношение:

$$C_3 + C_4 = \alpha\mu^2 C.$$

Следовательно, эти пять интегралов приводятся к четырем. Четыре интеграла (15), (16) и (18) позволяют определить $\varphi$, $q$, $\dot{\varphi}$, $\dot{q}$ в функции $t$ и четырех постоянных $C_1$, $C_2$, $C_3$, $C_4$. Это, очевидно, и будут те самые интегралы, которые возможно получить непосредственным интегрированием уравнений движения (14).

Среднеазиатский
государственный университет
Ташкент

Поступило
27 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости, Полн. собр. соч., 1, 1933. [2] М. Ф. Шульгин, ДАН, 75, № 3 (1950); ДАН, 81, № 1 (1951). [3] С. А. Чаплыгин, К теории движения неголономных систем. Теорема о привод. множителе, Полн. собр. соч., 1, 1933.