Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Ю. СМИРНОВ

О ПРОСТРАНСТВАХ БЛИЗОСТИ В СМЫСЛЕ В. А. ЕФРЕМОВИЧА *

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 IV 1952)

В ([1,2]), а также на Всесоюзной топологической конференции (см. ([3])) В. А. Ефремовичем были изложены начала основанной им теории пространств близости. Как известно, понятие пространств близости (будем их для краткости называть δ-пространствами), так же как и равномерные структуры А. Вейля (([4]) гл. 2) являются естественными обобщениями понятий метрического пространства и топологической группы.

I. Назовем δ-расширением δ-пространства P всякое такое δ-пространство $\tilde{P}$, в котором P содержится в качестве всюду плотного подпространства. Назовем δ-пространство P максимальным, если P является единственным своим δ-расширением.

Несколько усложняя способ П. С. Александрова построения максимальных бикомпактных расширений (([5]), § 4, п. 6), мы сможем для каждого δ-пространства P построить его максимальное δ-расширение uP: назовем систему ξ множеств A данного δ-пространства P δ-системой, если каждое множество $A \in \xi$ является δ-окрестностью ([1]) некоторого $B \in \xi$. Концом δ-пространства P назовем такую центрированную δ-систему ξ, которую нельзя вложить в никакую центрированную δ-систему, отличную от нее самой. Такими концами являются системы ξ_x всех δ-окрестностей каждой точки $x \in P$. Элементами максимального δ-расширения uP δ-пространства P являются все концы δ-пространства P. Для того чтобы ввести близость в uP, определим отображение O системы всех подмножеств δ-пространства P в систему подмножеств uP как отображение, ставящее в соответствие каждому $A \subseteq P$ совокупность $O(A)$ всех концов ξ, содержащих A в качестве своего элемента. Теперь объявим подмножества C и D множества uP далекими (т. е. не близкими), если в P существуют такие далекие множества A и B, что $C \subseteq O(A)$ и $D \subseteq O(B)$. Легко проверить, что полученная близость удовлетворяет всем аксиомам В. А. Ефремовича. Рассмотрим далее отображение ξ δ-пространства P в uP, ставящее в соответствие каждой точке $x \in P$ конец ξ_x. Оно оказывается взаимно-однозначным δ-отображением (так мы называем отображения, сохраняющие близость, — равномерно непрерывные в смысле В. А. Ефремовича ([1])). Обратное отображение ξ^{-1} также оказывается δ-отображением, а следовательно, само ξ — «эквиморфизмом». Образ $\xi(P)$ δ-пространства P всюду плотен в uP. Поэтому, отождествляя точки δ-пространства P с концами ξ_x, мы получим искомое δ-вложение δ-пространства P в uP в качестве всюду плотного подпространства. Для доказательства максимальности uP нам потребуется следующая теорема.

---

* Доложено на заседании Московского математического общества 11 марта 1952 г.

Т е о р е м а 1. *δ-пространство P максимально тогда и только тогда, если всякая центрированная δ-система имеет непустое пересечение.*

Действительно, в случае, когда P не максимально, к нему можно добавить еще одну точку ξ; взяв пересечения всех δ-окрестностей точки ξ в δ-пространстве $P \cup \xi$ с подпространством P, мы и получим центрированную δ-систему δ-пространства P с пустым пересечением. Обратно, если δ-пространство P имеет центрированную δ-систему с пустым пересечением, то мы можем ее дополнить до конца ξ, пересечение всех элементов которого также будет пусто. Значит, $\xi \in uP \setminus P$, а потому P не максимально.

Т е о р е м а 2. *δ-пространство P максимально тогда и только тогда, если его топология бикомпактна.*

В самом деле, нужно только показать, что всякое максимальное δ-пространство P бикомпактно. Для этого возьмем в нем произвольную центрированную систему φ замкнутых множеств Φ и покажем, что ее пересечение не пусто. Сначала убеждаемся, что для любого замкнутого множества $\Phi \subseteq P$ система ξ_Φ всех его δ-окрестностей является δ-системой, пересечение которой равно Φ. Потом берем объединение $\xi = \bigcup \xi_\Phi$ всех δ-систем ξ_Φ (где Φ пробегает все φ). Система ξ оказывается центрированной δ-системой, пересечение которой равно пересечению системы φ. Значит, в силу максимальности P, пересечение системы φ не пусто, ч. т. д.

Из теоремы 2 следует, что в м е т р и ч е с к о м с л у ч а е м а к с и м а л ь н о с т ь я в л я е т с я п о н я т и е м, о т л и ч н ы м о т п о н я т и я п о л н о т ы.

Т е о р е м а 3. *Всякое δ-пространство P имеет единственное максимальное δ-расширение, а именно δ-расширение uP.*

Допустим, что существует δ-пространство P с двумя различными максимальными δ-расширениями uP и vP. Обозначим через R топологию δ-пространства P. Так как uP и vP — различные бикомпактные расширения пространства R, то в R имеются множества A и B, замыкания которых в одном расширении, пусть в uP, пересекаются, а в vP не пересекаются. Отсюда получаем, что A и B близки в uP, но не близки в vP, чего не может быть, так как и uP и vP являются δ-расширениями одного и того же δ-пространства P, ч. т. д.

Из всего изложенного вытекает:

Т е о р е м а 4. *Отображение u, ставящее в соответствие каждому δ-пространству P, порождающему данное вполне регулярное пространство R, максимальное δ-расширение uP (являющееся бикомпактным расширением R), есть взаимно-однозначное отображение на множество всех бикомпактных расширений пространства R.*

Итак, т е о р и я δ-п р о с т р а н с т в м о ж е т б ы т ь с в е д е н а к т е о р и и б и к о м п а к т н ы х р а с ш и р е н и й.

Заметим, что при этом максимальному бикомпактному расширению βR соответствует δ-пространство P, в котором далеки всякие два функционально отделимые множества пространства R.

Известно, что множество всех бикомпактных расширений данного вполне регулярного пространства R частично упорядочено: $\alpha R > \gamma R$, если имеется непрерывное отображение расширения αR в γR, оставляющее точки пространства R на месте. Множество всех δ-пространств, совместимых с R, также частично упорядочено: δ-пространство $P > P'$, если тождественное отображение пространства R на себя является δ-отображением δ-пространства P на P'.

Т е о р е м а 4'. *Отображение u множества всех δ-пространств, совместимых с данным вполне регулярным пространством R, на* *множество всех бикомпактных расширений пространства R изоморфно, т. е. сохраняет порядок.*

В самом деле, если $\alpha R > \gamma R$, то и для соответствующих δ-пространств $P > P'$, так как всякое непрерывное отображение одного бикомпакта в другой является δ-отображением. Для доказательства обратного утверждения применяется следующая теорема.

Теорема 5. *Всякое δ-отображение δ-пространства P в δ-пространство P' можно продолжить в δ-отображение максимального δ-расширения uP в максимальное δ-расширение uP'.*

Для доказательства мы рассматриваем δ-отображение f δ-пространства P в P' как непрерывное отображение топологического пространства R, порожденного близостью P, в топологическое пространство R', порожденное близостью P', и с помощью теории гомоморфизмов ([6], теорема 3) доказываем, что оно может быть продолжено в непрерывное отображение бикомпактного расширения uP пространства R в бикомпактное расширение uP' пространства R'.

Из известной теоремы А. Н. Тихонова о вложении вполне регулярных пространств в произведение бесконечного числа отрезков вытекает теорема 6.

Теорема 6. *Всякое δ-пространство P можно δ-вложить в произведение τ отрезков, где τ — вес δ-расширения uP.*

В метрическом случае большое значение имеет

Теорема 7. *Для того чтобы метрическое пространство P было полным, необходимо и достаточно, чтобы никакая точка дополнения $uP \setminus P$ не удовлетворяла первой аксиоме счетности.*

Необходимость нашего условия следует из утверждения:

Теорема 7'. *Если метрическое пространство P полно, то всякое замкнутое множество типа G_δ, лежащее в дополнении $uP \setminus P$, имеет мощность не меньшую, чем мощность континуума.*

Из теоремы 7 вытекает:

Следствие. *Пополнение всякого метрического пространства P состоит из всех точек δ-расширения uP, удовлетворяющих первой аксиоме счетности.*

II. Исследуем теперь связь между δ-пространствами и вейлевскими равномерными структурами ([4], гл. 2). Легко видеть, что всякая равномерная структура множества M порождает на нем близость В. А. Ефремовича. Верно и обратное: всякое δ-пространство P можно получить из некоторой равномерной структуры. Действительно, возьмем δ-расширение uP δ-пространства P. В силу бикомпактности на нем имеется всего лишь одна равномерная структура ([4], гл. 2, § 4, теорема 1), которая порождает на P равномерную структуру W_u, определяющую то же δ-пространство P.

Множество всех равномерных структур данного множества M частично упорядочено: $W > W'$, если тождественное отображение множества M на себя оказывается равномерно непрерывным отображением структуры W в W'. Легко проверить, что $W > W'$, если W есть более тонкая в смысле А. Вейля структура, чем W' (см. [4], гл. 2, § 1, опр. 4, § 2, опр. 3).

Теорема 8. *В системе всех равномерных структур, порождающих данное δ-пространство P, структура W_u, проистекающая из δ-расширения uP, является минимальной.*

Теорема 9. *В системе всех равномерных структур, порождающих данное метризуемое δ-пространство P, метрическая структура W_c является максимальной.*

(Определение метрической структуры см. в [4], гл. 2, § 1, пример 1.)

Пусть нам дано множество M и его подмножество M'. Легко видеть, что всякая структура W множества M высекает в M' некоторую структуру W'. Скажем, что структура W' множества M' продолжаема на множество M, если существует структура W множества M, высекающая в M' структуру W'. Назовем δ-пространство P полным, если оно имеет максимальную равномерную структуру W_c и если эта структура W_c не продолжаема ни на какое δ-расширение δ-пространства P, отличное от P. Наконец, пополнением данного δ-пространства P назовем такое полное его δ-расширение cP, максимальная структура которого высекает в P максимальную структуру.

Теорема 10. *Всякое δ-пространство P с максимальной структурой имеет и притом только одно пополнение.*

В. А. Ефремович предложил следующее определение: δ-пространство P называется вполне ограниченным, если никакое его подмножество не δ-гомеоморфно (не эквиморфно) множеству натуральных чисел. Легко показать, что в метрическом случае это определение эквивалентно обычному определению полной ограниченности.

Оказывается, что и для случая δ-пространств верна теорема:

Теорема 11. *Для того чтобы δ-пространство P было бикомпактным (максимальным), необходимо и достаточно, чтобы оно было полным и вполне ограниченным.*

Существенную роль в доказательстве этой теоремы имеет теорема 12:

Теорема 12. *Всякое вполне ограниченное δ-пространство имеет только одну порождающую его равномерную структуру.*

Поступило
31 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Ефремович, ДАН, **76**, № 3, 341 (1951). [2] В. А. Ефремович, Усп. матем. наук, **4**, 2 (30), 178 (1949). [3] В. А. Ефремович, Усп. матем. наук **6**, 4 (44), 203 (1951). [4] N. Bourbaki, Actualités scientifiques et industrielles, 858, 1942. [5] П. С. Александров, Усп. матем. наук, **2**, 1 (17), 5 (1947). [6] Ю. М. Смирнов, Усп. матем. наук, **6**, 4 (44), 204 (1951).