

Д. М. СМЕРНОВ

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 17 IV 1952)

В настоящей заметке изучаются периодические группы автоморфизмов разрешимых A_3 -групп (¹).

Теорема 1. *Всякая периодическая группа автоморфизмов Φ разрешимой A_4 -группы G конечна.*

Доказательство. Разрешимая A_4 -группа G обладает конечной цепочкой характеристических подгрупп

$$G_0 = 1 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_s = G, \quad (*)$$

все факторы которой или конечны или же являются абелевыми группами без кручения конечных рангов (¹, стр. 575). Строим следующим образом невозрастающую цепочку подгрупп Φ_i группы Φ .

Полагаем $\Phi_0 = \Phi$. Если группа Φ_i уже построена, то через Φ_{i+1} обозначаем совокупность всех элементов группы Φ_i , каждый из которых индуцирует тождественный автоморфизм группы G_{i+1}/G_i . Очевидно, Φ_{i+1} — нормальный делитель группы Φ_i .

Фактор-группа Φ_i/Φ_{i+1} изоморфна группе индуцируемых элементами Φ_i автоморфизмов группы G_{i+1}/G_i . Следовательно, если группа G_{i+1}/G_i конечна, то группа Φ_i/Φ_{i+1} также конечна.

Пусть группа G_{i+1}/G_i абелева без кручения конечного ранга. Тогда группа Φ_i/Φ_{i+1} изоморфно представима матрицами над полем рациональных чисел (¹) и, ввиду своей периодичности, опять конечна.

Таким образом, в построенной цепочке подгрупп $\Phi_0 = \Phi \supseteq \Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \dots \supseteq \Phi_s$ группы Φ все фактор-группы конечны. Поэтому последняя в этой цепочке подгруппа Φ_s имеет конечный индекс в группе Φ . Положим $\Psi = \Phi_s$ и покажем, что группа Ψ конечна. Вместе с этим утверждение теоремы также будет доказано.

Каждый элемент группы Ψ индуцирует тождественные автоморфизмы во всех фактор-группах G_i/G_{i-1} ($i = 1, 2, \dots, s$) цепочки (*). Обозначим через Ψ_i совокупность всех элементов группы Ψ , каждый из которых индуцирует тождественный автоморфизм группы G_i . Мы получаем цепочку нормальных делителей

$$\Psi_1 = \Psi \supseteq \Psi_2 \supseteq \Psi_3 \supseteq \dots \supseteq \Psi_s = 1$$

группы Ψ . Конечность группы Ψ будет доказана, если мы покажем, что все факторы Ψ_i/Ψ_{i+1} ($i = 1, 2, \dots, s-1$) этой цепочки конечны.

Пусть i — некоторое число, $1 \leq i \leq s-1$. Группа G_{i+1}/G_i не более чем счетна и имеет конечный специальный ранг. Ввиду этого она

является объединением неубывающей последовательности своих подгрупп

$$A_1^{(i)} / G_i \subseteq A_2^{(i)} / G_i \subseteq \dots \subseteq A_j^{(i)} / G_i \subseteq \dots,$$

каждая из которых имеет r_i образующих, где через r_i обозначен специальный ранг группы G_{i+1} / G_i . Выбираем в группе $A_j^{(i)}$ систему r_i элементов $a_{j1}^{(i)}, a_{j2}^{(i)}, \dots, a_{jr_i}^{(i)}$ таких, что их образы в фактор-группе $A_j^{(i)} / G_i$ составляют систему образующих этой фактор-группы. Пусть

$$P_i = G_i \times G_i \times \dots \times G_i$$

есть прямое произведение r_i экземпляров группы G_i . Так как каждый элемент группы Ψ_i индуцирует тождественные автоморфизмы групп G_i и G_{i+1} / G_i , то при заданных числах i и j соответствие

$$\psi \rightarrow (a_{j1}^{(i)-1} a_{j1}^{(i)\psi}, a_{j2}^{(i)-1} a_{j2}^{(i)\psi}, \dots, a_{jr_i}^{(i)-1} a_{jr_i}^{(i)\psi}),$$

где $\psi \in \Psi_i$, $a^\psi = \psi(a)$, определяет гомоморфное отображение групп Ψ_i в группу P_i . Ядро этого гомоморфизма обозначим через $\Theta_j^{(i)}$.

Множество $\Theta_j^{(i)}$ состоит, очевидно, из тех и только тех элементов группы Ψ_i , каждый из которых индуцирует тождественный автоморфизм группы $A_j^{(i)}$. Отсюда следует, ввиду $A_j^{(i)} \subseteq A_{j+1}^{(i)}$, что $\Theta_j^{(i)} \supseteq \Theta_{j+1}^{(i)}$. Таким образом, ядра построенных гомоморфизмов удовлетворяют следующим включениям:

$$\Psi_i \supseteq \Theta_1^{(i)} \supseteq \Theta_2^{(i)} \supseteq \dots \supseteq \Theta_j^{(i)} \supseteq \dots$$

Так как объединение подгрупп $A_j^{(i)}$ ($j = 1, 2, 3, \dots$) совпадает с группой G_{i+1} , то пересечение групп $\Theta_j^{(i)}$ совпадает с Ψ_{i+1} .

При любом j фактор-группа $\Psi_i / \Theta_j^{(i)}$ изоморфна некоторой периодической подгруппе группы P_i . Группа P_i , будучи прямым произведением конечного числа экземпляров разрешимой A_4 -группы G_i , сама является разрешимой A_4 -группой. Согласно теореме 9 из (1) порядки всех периодических подгрупп разрешимой A_4 -группы конечны и ограничены в совокупности. Таким образом, при любом j фактор-группа $\Psi_i / \Theta_j^{(i)}$ конечна, и ее порядок не превосходит некоторого числа N , не зависящего от j .

Отсюда следует, что при некотором j будем иметь:

$$\Theta_j^{(i)} = \Theta_{j+1}^{(i)} = \Theta_{j+2}^{(i)} = \dots = \Psi_{i+1},$$

т. е. $\Psi_i / \Psi_{i+1} = \Psi_i / \Theta_j^{(i)}$ — конечная группа.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Всякая периодическая группа автоморфизмов Φ разрешимой A_3 -группы G является конечным расширением абелевой A_3 -группы.*

Доказательство. Обозначим периодическую часть группы G через P . Согласно теореме 3 из (1) фактор-группа G/P имеет тип A_4 .

Совокупность Q всех элементов группы P , из которых можно извлекать в P корни любой положительной степени, составляет подгруппу этой группы, распадающуюся в прямое произведение конечного числа абелевых групп типа p^∞ , причем индекс Q в P конечен.

Подгруппа Q характеристична в G , а G/Q — разрешимая A_4 -группа.

Обозначим через Θ совокупность всех элементов группы Φ , каждый из которых индуцирует тождественные автоморфизмы групп Q и G/Q . Очевидно, Θ есть группа.

Всякая периодическая группа автоморфизмов группы Q конечна⁽²⁾. Ввиду этого и теоремы 1 индекс Θ в Φ конечен. Нам остается показать лишь, что Θ есть абелева A_3 -группа.

Группа G/Q не более чем счетна и имеет конечный специальный ранг. Ввиду этого она является объединением неубывающей цепочки своих подгрупп

$$A_1/Q \subseteq A_2/Q \subseteq \dots \subseteq A_i/Q \subseteq \dots,$$

каждая из которых имеет r образующих, где через r обозначен специальный ранг группы G/Q . Выбираем в группе A_i r элементов $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{ir}$, образы которых в A_i/Q составляют систему образующих этой фактор-группы. Пусть

$$R = Q \times Q \times \dots \times Q$$

есть прямое произведение r экземпляров группы Q . Так как каждый элемент группы Θ индуцирует тождественные автоморфизмы групп Q и G/Q , то при заданном числе i соответствие

$$\theta \rightarrow (a_{i1}^{-1}a_{i1}^0, a_{i2}^{-1}a_{i2}^0, \dots, a_{ir}^{-1}a_{ir}^0),$$

где $\theta \in \Theta$, определяет гомоморфное отображение группы Θ в группу R . Ядро этого гомоморфизма обозначим через Θ_i . Оно состоит, очевидно из тех и только тех элементов группы Θ , каждый из которых индуцирует тождественный автоморфизм группы A_i .

Теперь легко проверить, что ядра построенных гомоморфизмов удовлетворяют следующим условиям:

$$\Theta \supseteq \Theta_1 \supseteq \Theta_2 \supseteq \dots \supseteq \Theta_i \supseteq \dots; \quad \bigcap \Theta_i = 1.$$

Каждая фактор-группа Θ/Θ_i , будучи изоморфна подгруппе абелевой группы R , сама является абелевой группой. Отсюда следует, что коммутант Θ' группы Θ содержится в пересечении $\bigcap \Theta_i$ групп Θ_i и, ввиду $\bigcap \Theta_i = 1$, является единичной группой. Этим доказано, что группа Θ абелева.

Покажем, что группа Θ имеет конечный ранг. Пусть $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ — произвольная конечная система элементов этой группы. Ввиду коммутативности и периодичности группы Θ элементы этой системы порождают конечную подгруппу, которую мы обозначим через Ω . Выбираем такое число i , при котором $\Omega \cap \Theta_i = 1$. Получаем:

$$\Omega \cong \Omega\Theta_i/\Theta_i,$$

т. е. группа Ω изоморфна подгруппе группы R . Следовательно, группа Ω допускает такую систему образующих, число элементов которой не больше ранга группы R . Но это означает, что ранг группы Θ не выше ранга группы R и потому конечен.

Покажем, наконец, что группа Θ распадается в прямое произведение лишь конечного числа примарных групп, относящихся к различным простым числам. Пусть отличный от единицы элемент θ группы Θ принадлежит p -компоненте этой группы (p — простое число). Выбираем такое число i , при котором образ $\bar{\theta}$ элемента θ в $\Theta = \Theta/\Theta_i$ отличен от единицы. Так как элемент $\bar{\theta}$ имеет порядок, равный степени числа p , и группа $\bar{\Theta}$ изоморфна некоторой подгруппе группы R ,

то группа R также содержит отличный от единицы элемент, порядок которого есть степень числа p . Следовательно, число примарных компонент группы Θ не больше числа примарных компонент группы R и потому конечно.

Таким образом, группа Θ коммутативна, имеет конечный ранг и распадается в прямое произведение лишь конечного числа примарных групп, относящихся к различным простым числам. Следовательно, Θ — абелева A_3 -группа.

Теорема 2 доказана.

Заметим, что периодическая группа автоморфизмов даже абелевой A_3 -группы может оказаться бесконечной.

Из теоремы 2 и результатов работы (3), в частности, следует, что всякая периодическая группа автоморфизмов разрешимой A_3 -группы изоморфно представима матрицами над некоторым полем нулевой характеристики.

Вопрос о том, допускает ли группа всех автоморфизмов разрешимой A_3 -группы изоморфное представление матрицами, остается пока открытым.

В качестве приложений теорем 1 и 2 сформулируем следующие результаты.

Теорема 3. *Фактор-группа G/N разрешимой A_3 -группы G по ее максимальному нильпотентному нормальному делителю N имеет тип A_4 .*

Отсюда непосредственно следует, что всякое расширение нильпотентной A_3 -группы с помощью абелевой группы типа p^∞ (p — простое число) нильпотентно.

Сформулируем еще следующий результат, касающийся групп с верхним центральным рядом длины ω и объединяющий теорему 4 Х. Х. Мухаммеджана (4) и лемму 6 Н. Ф. Сесекина (5).

Теорема 4. *Если длина верхнего центрального ряда некоторой группы G совпадает с первым предельным порядковым числом ω , то по крайней мере один его фактор не удовлетворяет условию минимальности для сервантных подгрупп.*

Заметим, что класс абелевых групп с условием минимальности для сервантных подгрупп в точности совпадает с классом абелевых групп, удовлетворяющих условию максимальности для сервантных подгрупп, и в точности совпадает с классом абелевых A_3 -групп, указанным А. И. Мальцевым (1).

Теорема 4 представляет собой также ответ на вопрос, сформулированный нами в заметке (6).

Автор выражает благодарность А. И. Мальцеву за ценные указания.

Ивановский государственный педагогический институт

Поступило
8 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ А. И. Мальцев, Матем. сборн., 28 (70):3, 537 (1951). ² С. Н. Черников, ДАН, 72, № 2, 243 (1950). ³ А. И. Мальцев, Матем. сборн., 8 (50):3, 405 (1940). ⁴ Х. Х. Мухаммеджан, ДАН, 65, № 3, 269 (1949). ⁵ Н. Ф. Сесекин, ДАН, 70, № 2, 185 (1950). ⁶ Д. М. Смирнов, ДАН, 76, № 5, 643 (1951).