Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

О. В. САРМАНОВ

О ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ МОМЕНТАХ СИММЕТРИЧНОЙ КОРРЕЛЯЦИИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 19 IV 1952)

1. Пусть $F(x, y) = F(y, x)$ — симметричная плотность распределения двух переменных, определяющая корреляцию во всей плоскости и удовлетворяющая условию

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F^2(x, y)}{p(x)\,p(y)}\,dx\,dy = K^2 < \infty, \tag{1}$$

где $p(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dy$, $p(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dx$ — априорные плотности x и y соответственно.

Будем называть условным функциональным моментом некоторой функции $r(y)$ функцию:

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r(y)\,\frac{F(x, y)}{p(x)}\,dy, \tag{2}$$

при этом мы предполагаем существование интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} r^2(y)\,\frac{F(x, y)}{p(x)}\,dy < \infty. \tag{3}$$

Из сходимости интеграла (3) вытекает абсолютная сходимость интеграла (2).

Целью настоящей заметки является выяснение ограничений порядка роста $\varphi(x)$ для неограниченных функций $r(y)$, вытекающих из симметрии плотности $F(x, y)$ и условий (1) и (3). (Если $|r(y)| < A$, то из (2) вытекает тривиальная оценка сверху $|\varphi(x)| < A$).

2. Следуя методу, изложенному мной в заметках [2, 3], рассмотрим последовательность итерированных абсолютных функциональных моментов функции $r(y)$:

$$r_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)|\,\frac{F(x, y)}{p(x)}\,dy;\ \ldots\ ;\ r_k(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{k-1}(y)\,\frac{F(x, y)}{p(x)}\,dy,\ k = 2, 3, \ldots \tag{4}$$

Как известно (см., например, [1]), спектр стохастического ядра $F(x, y) / p(x)$ имеет вид:

$$1 < |\lambda_1| \leqslant |\lambda_2| \leqslant \cdots \leqslant |\lambda_n| \leqslant \cdots, \tag{5}$$

причем $\lambda_0 = 1$ — простое характеристическое число.

Тогда, при соблюдении условия (3), k-й итерированный функциональный момент $r_k(x)$ почти при всех x разлагается в ряд Фурье по фундаментальным функциям $\omega_i(x)$ симметричного ядра $F(x, y)/\sqrt{p(x)\,p(y)}$:

$$r_k(x) = c_0 + c_1 \frac{\omega_1(x)}{\lambda_1^k} + c_2 \frac{\omega_2(x)}{\lambda_2^k} + \ldots, \tag{6}$$

где

$$c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)|\, p(y)\, dy, \; \ldots, \; c_i = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)|\, \omega_i(y)\, p(y)\, dy, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

коэффициенты Фурье функции $|r(y)|$.

Из (5) и (6) вытекает, что почти при всех x существует предел

$$\lim_{k \to \infty} r_k(x) = c_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |r(y)|\, p(y)\, dy; \tag{7}$$

c_0 является априорным абсолютным моментом функции $r(y)$, существование которого вытекает из существования условного абсолютного момента $r_1(x)$.

3. Теперь мы можем доказать следующую основную теорему.

Теорема. *Если симметрическая корреляция удовлетворяет ограничению* (1), *а неограниченная функция* $r(y)$ *имеет интегрируемый с весом* $F(x, y) / p(x)$ *квадрат* (*условие* (3)), *то условный функциональный момент* $\varphi(x)$ *этой функции не может удовлетворять неравенству*

$$|\varphi(x)| \geqslant \lambda (|r(x)| - A) \tag{8}$$

при $|r(x)| \geqslant A$, *где* $\lambda > 1$, $A > 0$.

Доказательство. Кроме функции $\varphi(x)$, рассмотрим последовательность неотрицательных функций $r_1(x), \ldots, r_k(x), \ldots, k=2, 3, \ldots$ Из (2) и (4) вытекает, что $r_1(x) \geqslant |\varphi(x)|$.

Построим функцию

$$\omega(|r(y)|) = \begin{cases} 0 & \text{при } |r(x)| \leqslant A; \\ \lambda(|r(x)| - A) & \text{при } |r(x)| \geqslant A; \end{cases} \tag{9}$$

$\omega(z)$ является непрерывной выпуклой функцией неотрицательного аргумента $z = |r(x)|$.

Предположим теперь, что при некоторых $\lambda > 1$ и $A > 0$ выполнено (8) при всех x, удовлетворяющих неравенству $|r(x)| \geqslant A$. Тогда при всех x

$$r_1(x) \geqslant \omega(|r(x)|). \tag{10}$$

Найдем оценки снизу для всех $r_k(x)$, аналогичные (10); при нахождении оценки снизу для $r_2(x)$ мы пользуемся неубыванием функции $\omega(z)$ и известным неравенством Ляпунова—Гельдера для непрерывных выпуклых функций

$$r_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} r_1(y)\, \frac{F(x,\ y)}{p(x)}\, dy \geqslant \int_{-\infty}^{\infty} \omega(|r(y)|)\, \frac{F(x,\ y)}{p(x)}\, dy \geqslant$$

$$\geqslant \omega\left\{\int_{-\infty}^{\infty} |\, r(y)\,|\, \frac{F(x,\ y)}{p(x)}\, dy\right\} = \omega(r_1(x)) \geqslant \omega(\omega\,|\, r\ (x)|) = \omega^{(2)}(|\, r(x)|)$$

и, вообще,

$$r_k(x) \geqslant \omega^{(k)}(|\, r(x)|), \tag{11}$$

где $\omega^{(k)}(|\, r(x)|)$ определяется по индукции и имеет следующее явное выражение:

$$\omega^{(k)}(|\, r(x)|) =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } |\, r(x)| \leqslant \dfrac{\lambda A}{\lambda - 1}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda^k}\right) = c_k, \\ \lambda^k\left(|\, r(x)| - \dfrac{\lambda A}{\lambda - A}\left(1 - \dfrac{1}{\lambda^k}\right)\right) & \text{при } |\, r(x)| \geqslant c_k. \end{cases} \tag{9'}$$

Если поэтому $|\, r(x)| > \frac{\lambda A}{\lambda - 1}$, а такие значения x найдутся, так как $r(x)$ по предположению неограниченная функция, то при этих x и при всех k

$$r_k(x) \geqslant \lambda^k\left(|\, r(x)\,| - \frac{\lambda A}{\lambda - 1}\right),$$

и, следовательно, при всех таких x $\lim\limits_{k \to \infty} r_k(x) = \infty$, что противоречит соотношению (7). Теорема доказана.

Замечание. Неограниченной функцией $r(x)$ мы называем такую функцию, что неравенство $|\, r(x)| > M$, где M — любое положительное число, осуществляется для множества значений x положительной меры.

4. Из доказанной теоремы вытекает ряд следствий.

Если $r(x) = x^n$, то мы имеем дело не с функциональными, а с обычными степенными условными моментами.

Для условных степенных моментов мы, в частности, получаем следующий результат: м.о.$_x\, y^n = \int_{-\infty}^{\infty} y^n \frac{F(x,\ y)}{p(x)}\, dy$ не может быть многочленом степени выше n, если $F(x,\ y)$ симметричная функция.

При $n = 1$ мы получаем первый условный момент или функцию, фигурирующую в уравнении линии регрессии

$$Y = \text{м.о.}_x\, y = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, \frac{F(x,\ y)}{p(x)}\, dy;$$

эта функция при всех достаточно больших $|\, x\,|$ не может удовлетворять неравенству

$$|\,\text{м.о.}_x\, y\,| > \lambda\,(|\, x\,| - A), \tag{8'}$$

где $\lambda > 1$, $A > 0$.

Последний результат в работе автора [3] был получен непосредственно.

Ленинградский горный институт

Поступило
3 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. В. Сарманов, ДАН, **53**, № 9 (1946). [2] О. В. Сарманов, ДАН, **59**, № 6 (1948). [3] О. В. Сарманов, ДАН, **60**, № 4 (1948).