

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

М. Ш. МИНЦОВСКИЙ

**НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ЦЕНТРАЛЬНО НАГРУЖЕННОГО
КЛИНОВИДНОГО ФУНДАМЕНТА**

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 13 V 1952)

Клиновидные фундаменты находят применение в строительстве зданий, расположенных над горными выработками⁽¹⁾. Ниже приводится в кратком виде решение задачи об определении несущей способности центрально нагруженного фундамента, передающего давление связному грунту.

При решении задачи приняты следующие допущения. Изменение формы свободной поверхности грунта в процессе вдавливания фундамента в грунт не учитывается. Последнее основано на том, что мы рассматриваем малые деформации, при которых это изменение не играет существенной роли. Трение фундамента о грунт учитывается только по наклонной подошве (рис. 1). По сравнению с реальными нагрузками на фундаменты влияние объемных сил на величину напряжений грунта незначительно. Поэтому эти силы не учитываются.

Влияние веса грунта, расположенного выше линии AA' (рис. 1), учитывается симметричной боковой пригрузкой γH , где γ — объемный вес грунта, а H — высота слоя грунта.

Исследования показывают, что сетка линий скольжения грунта (рис. 1) имеет вид, подобный сетке линий скольжения среды с идеальным сцеплением⁽³⁾. Зона предельного равновесия грунта по одну сторону от вертикальной оси состоит из двух треугольников ABC и ADE и области ACD . В треугольнике ABC сетка линий скольжения состоит из двух семейств параллельных прямых:

$$\begin{aligned} \text{первое семейство: } y &= x \operatorname{tg} \varphi + \operatorname{const}, \\ \text{второе семейство: } y &= -x \operatorname{ctg}(\varphi + \rho) + \operatorname{const}, \end{aligned} \quad (1)$$

где φ — угол наклона линий скольжения первого семейства к оси x , ρ — угол внутреннего трения грунта.

В треугольнике ADE сетка линий скольжения также состоит из двух семейств параллельных прямых, выходящих на поверхность под углами $\pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}\right)$. Уравнения этих прямых аналогичны уравнениям (1), в которые следует подставить соответствующее значение угла φ .

В области ACD линии скольжения первого семейства представляют собой логарифмические спирали:

$$\begin{aligned} x &= C_1 \sin(\varphi + \rho) e^{\varphi \operatorname{tg} \rho}, \\ y &= -C_1 \cos(\varphi + \rho) e^{\varphi \operatorname{tg} \rho} - a. \end{aligned} \quad (2)$$

В случае среды с идеальным сцеплением ($\rho = 0$) логарифмические спирали вырождаются в круговые дуги, а область ACD становится круговым сектором⁽³⁾.

Второе семейство линий скольжения в области ACD состоит из прямых линий

$$y = -C_2x - a. \quad (3)$$

Для компонентов напряжения имеем формулы⁽²⁾:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \lambda \sigma [1 + \sin \rho \sin (2\varphi - 2\theta + \rho)] - k \operatorname{ctg} \rho, \\ \tau_{mn} &= -\lambda \sigma \sin \rho \cos (2\varphi - 2\theta + \rho), \end{aligned} \quad (4)$$

где σ_n и τ_{mn} — нормальное и касательное напряжения; λ — произвольная величина, имеющая размерность напряжения; σ — безразмерная величина; k — коэффициент сцепления грунта; остальные обозначения прежние.

Ниже мы будем пользоваться функциями:

$$\xi = \frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \sigma + \varphi, \quad \eta = \frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \sigma - \varphi. \quad (5)$$

Функции ξ и η предполагаются непрерывными во всей зоне $ABCDE$ за исключением точки A , где величина напряжений резко меняется⁽²⁾.

Касательные напряжения считаются положительными, если они направлены снизу вверх. Так как касательные напряжения, передаваемые фундаментом на грунт, направлены сверху вниз, то, считая их пропорциональными нормальному давлению, будем иметь зависимость:

$$\tau_{mn} = -\sigma_n \operatorname{tg} \mu, \quad (6)$$

где μ — угол трения между фундаментом и грунтом.

Подставляя это выражение во вторую из формул (4) и исключив из этих формул последовательно функции σ и φ , получим два варианта граничных условий:

первый вариант

$$\varphi = \theta - \frac{\rho}{2} - \frac{\mu}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \arcsin \chi + n\pi, \quad (7)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_n + k \operatorname{ctg} \rho}{\lambda \cos^2 \rho} - \frac{1}{\lambda \cos \rho} \sqrt{(\sigma_n + k \operatorname{ctg} \rho)^2 \operatorname{tg}^2 \rho - \sigma_n^2 \operatorname{tg}^2 \mu};$$

второй вариант

$$\varphi = \theta - \frac{\rho}{2} - \frac{\mu}{2} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arcsin \chi + n\pi, \quad (8)$$

$$\sigma = \frac{\sigma_n + k \operatorname{ctg} \rho}{\lambda \cos^2 \rho} + \frac{1}{\lambda \cos \rho} \sqrt{(\sigma_n + k \operatorname{ctg} \rho)^2 \operatorname{tg}^2 \rho - \sigma_n^2 \operatorname{tg}^2 \mu},$$

где n — целое число; χ — величина, определяемая равенством

$$\chi = \frac{\sin \mu}{\sin \rho} \left(1 - \frac{k \operatorname{ctg} \rho}{\lambda \sigma} \right). \quad (9)$$

Как показали исследования⁽²⁾, в подобных задачах следует под фундаментом принимать первый вариант граничных условий, а за пределами фундамента — второй вариант граничных условий.

Полагая в формулах (8)

$$n = 0, \quad \lambda = 1 \text{ т/м}^2, \quad \sigma_n = \gamma H, \quad \mu = 0, \quad \theta = 0,$$

получим для участка AE :

$$\varphi = -\frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}, \quad \sigma = \frac{\gamma H + k \operatorname{ctg} \rho}{1 - \sin \rho}, \quad (10)$$

а из формул (5) будем иметь:

$$\xi = \frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \frac{\gamma H + k \operatorname{ctg} \rho}{1 - \sin \rho} - \frac{\pi}{4} - \frac{\rho}{2}. \quad (11)$$

Вдоль линии контакта AB значения σ и φ определяются формулами (7). Для того чтобы при движении вдоль любой линии скольжения первого семейства $1-2-3-4$ (рис. 1) угол φ оставался непрерывным, нужно в первой из формул (7) положить $n = -1$. Принимая по-прежнему $\lambda = 1 \text{ т/м}^2$, получим:

$$\varphi = \theta - \frac{\rho}{2} - \frac{\mu}{2} - \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \chi. \quad (12)$$

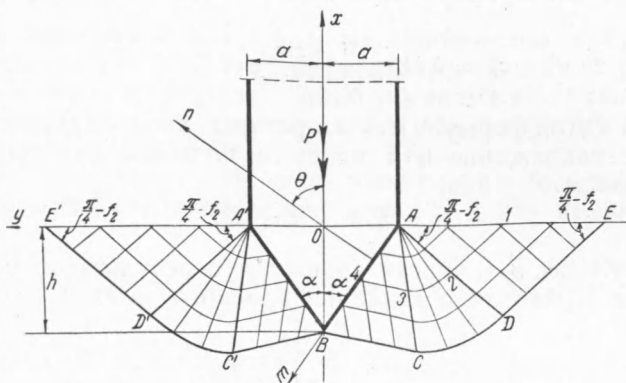


Рис. 1

Пользуясь формулами (5) и (12), получим значение ξ в области ABC :

$$\xi = \frac{\operatorname{ctg} \rho}{2} \ln \sigma + \theta - \frac{\rho}{2} - \frac{\mu}{2} - \frac{3}{4}\pi - \frac{1}{2} \operatorname{arc} \sin \chi. \quad (13)$$

Так как грунт находится в предельном равновесии, то по всей длине линии контакта σ_n имеет постоянное значение, и, следовательно, имеют постоянные значения и функции σ и φ .

Поэтому на основании формул (5) заключаем, что функции ξ в областях ABC и ADE также постоянны. Это условие дает возможность найти значения компонентов напряжения вдоль линии контакта. Функции σ и φ должны быть непрерывны во всей зоне $ABCDE$ (за исключением точки A), а для этого необходимо и достаточно, чтобы функции ξ , постоянные в областях ABC и ADE , были равны между собой.

Сравнивая выражения (11) и (13) и подставляя $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$, получим:

$$\sigma = \frac{\gamma H + k \operatorname{ctg} \rho}{1 - \sin \rho} e^{(2\alpha + \mu + \operatorname{arc} \sin \chi) \operatorname{tg} \rho}, \quad (14)$$

где χ определяется формулой (9), в которой следует принять $\lambda = 1 \text{ т/м}^2$.

Выражение (14) является трансцендентным уравнением относительно σ и решение его в общем виде невозможно. Поэтому его приходится решать численно.

После определения σ нормальное напряжение может быть определено из первой формулы (4), в которой следует положить $\lambda = 1 \text{ т/м}^2$, а касательное напряжение — по формуле (3).

Предельная нагрузка определится из условия равновесия:

$$P = 2a\sigma_n + 2h\tau_{mn}. \quad (15)$$

Если трение по подошве не учитывается, то решение получается в замкнутом виде:

$$\sigma_n = (\gamma H + k \operatorname{ctg} \rho) \frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} e^{2\alpha \operatorname{tg} \rho} - k \operatorname{ctg} \rho, \quad (16)$$

$$P = 2a\sigma_n.$$

Подставляя в первую из этих формул $\alpha = \pi/2$ и полагая $\gamma = 0$, получим критическое напряжение для невесомого грунта под плоским фундаментом, ранее полученное иным путем М. И. Горбуновым-Посадовым (4):

$$\sigma_n = k \operatorname{ctg} \rho \left(\frac{1 + \sin \rho}{1 - \sin \rho} e^{\pi \operatorname{tg} \rho} - 1 \right). \quad (17)$$

Положив в этой формуле $\rho = 0$ и раскрыв неопределенность, получим критическое напряжение под плоским штампом для среды с идеальным сцеплением:

$$\sigma_n = k(\pi + 2). \quad (18)$$

Этот результат в точности совпадает с результатом решения известной задачи Прандтля о давлении плоского штампа на пластическое тело (3).

Поступило
11 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Указания по проектированию зданий над горными выработками в Донбассе, изд. Академии архитектуры Укр. ССР, Киев, 1951. ² В. В. Соколовский, Статика сыпучей среды, изд. АН СССР, 1942. ³ В. В. Соколовский, Теория пластичности, 1950. ⁴ М. И. Горбунов-Посадов, Физика и механика грунтов, № 3 (1949).