Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

М. А. НАЙМАРК

ОПИСАНИЕ ВСЕХ НЕПРИВОДИМЫХ УНИТАРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КЛАССИЧЕСКИХ ГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 IV 1952)

В совместных работах автора и И. М. Гельфанда ([2–5])* были описаны и подробно исследованы так называемые основные и дополнительные серии неприводимых унитарных представлений комплексных классических групп. Для случая комплексной унимодулярной группы второго порядка в одной из этих работ ([2]) было доказано, что представлениями основной и дополнительной серий исчерпываются все (с точностью до эквивалентности) неприводимые унитарные представления этой группы.

Вопрос о том, остается ли это предложение справедливым для любой классической группы, до сих пор оставался открытым. Он был решен в положительном смысле для представлений комплексной унимодулярной группы, содержащих единичное представление унитарной подгруппы ([5]). Доказательство этого результата было проведено там методом, существенно отличным от доказательства в ([2]) и основанным на изучении максимальных идеалов некоторого коммутативного кольца.

В этой заметке дается полное решение сформулированного выше вопроса для любой комплексной классической группы. Излагаемые ниже основные идеи доказательства состоят в комбинировании видоизмененных и обобщенных методов статей ([2], [5]) с некоторыми новыми результатами алгебраического характера и с некоторыми новыми оценками нормы в групповом кольце.

Таким образом, имеет место следующая теорема:

Всякое неприводимое унитарное представление комплексной классической группы эквивалентно одному из ее представлений основной или дополнительной серии.

Для простоты и краткости изложения мы ограничимся случаем комплексной унимодулярной группы, которую обозначим через $\mathfrak{G}$, хотя все рассуждения носят общий характер.

1. Представление $c(u)$. Пусть T_g — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ подгруппу всех унитарных матриц $u \in \mathfrak{G}$, а через Γ — подгруппу всех диагональных матриц $\gamma \in \mathfrak{A}$. Тогда T_u — унитарное представление группы $\mathfrak{A}$; в силу компактности последней оно разлагается в прямую сумму ее неприводимых представлений, которые все конечномерны. Как известно (см., например, ([1])), каждое такое представление описывается при помощи некоторого характера $\chi(\gamma)$ группы Γ, который называется весом представления. Отсюда вытекает, что эти представления можно задать при

---

* В данной заметке используются терминология и результаты этих работ.

помощи целых чисел $m_1, m_2, \ldots, m_{r-1}$ таких, что $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \ldots \geqslant m_{r-1} \geqslant 0$, где r — размерность представления. Поэтому веса неприводимых представлений группы $\mathfrak{A}$, встречающихся в разложении представления T_u, можно расположить в лексикографическом порядке. Тогда среди этих представлений будет представление с наинизшим весом, которое мы обозначим через $c(u)$. Вес представления $c(u)$ обозначим через $\chi(\gamma)$, а его размерность через r.

I. *Представление $c(u)$ встречается только один раз в разложении представления T_u на неприводимые.*

2. Кольцо R_0'. Обозначим через R групповое кольцо группы $\mathfrak{G}$, а через R_0' — совокупность всех функций $x(g) \in R$ вида

$$x(g) = x(u_1^{-1} \varepsilon u_2) = r^2 \sum_{p,\ q=1}^{r} X_{pq}(\varepsilon)\, \overline{c_{p1}(u_1)}\, c_{q1}(u_2),$$

где ε — диагональная матрица с положительными диагональными элементами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_r$ и $\varepsilon \in \mathfrak{G}$, а $(c_{pq}(u))$ — матрица оператора $c(u)$ в некотором базисе. Совокупность всех матриц ε обозначим через E.

II. *Множество R_0' есть подкольцо (без единицы) кольца R. При надлежащей нормировке инвариантных мер $d\mu(\varepsilon)$, $d\mu(g)$*

$$\frac{1}{r^2} \sum_{p,\ q=1}^{r} |X_{pq}(\varepsilon)|\, \omega(\varepsilon)\, d\mu(\varepsilon) \leqslant \int |x(g)|\, d\mu(g) \leqslant r^2 \sum_{p,\ q=1}^{r} |X_{pq}(\varepsilon)|\, \omega(\varepsilon)\, d\mu(\varepsilon), \quad (1)$$

где

$$\omega(\varepsilon) = \sum_{1 \leqslant p < q \leqslant r} (\varepsilon_p^2 - \varepsilon_q^2)^2. \quad (2)$$

3. Функции $B(\delta)$. Положим* для $x(g) \in R_0'$

$$B_{pq}(\delta) = \beta^{-1/2}(\delta) \int x(u_1^{-1} \delta \zeta u_2)\, c_{p1}(u_1)\, \overline{c_{q1}(u_2)}\, d\mu(u_1)\, d\mu(u_2)\, d\mu(\zeta); \quad (3)$$

матрицу с элементами $B_{qp}(\delta)$ обозначим через $B(\delta)$.

III. *Матрица $B(\delta)$ перестановочна с $c(\gamma)$ и $B(\gamma\delta) = c(\gamma) B(\delta) = B(\delta) c(\gamma)$.*

IV. *Соответствие $x(g) \to B(\delta)$ обладает следующими свойствами:*

1) *если $x(g) \to B(\delta)$, то $x^*(g) \to (B(\delta^{-1}))^*$;*

2) *если $x_1(g) \to B^{(1)}(\delta)$, $x_2(g) \to B^{(2)}(\delta)$, то $\lambda_1 x_1(g) + \lambda_2 x_2(g) \to \lambda_1 B^{(1)}(\delta) + \lambda_2 B^{(2)}(\delta)$ и $\int x_1(g_1)\, x_2(g g_1^{-1})\, d\mu(g_1) \to \int B^{(1)}(\delta')\, B^{(2)}(\delta\delta'^{-1})\, d\mu(\delta')$.*

4. Кольца R_0'' и $\mathfrak{B}$. Выберем ортонормальный базис $e_1, e_2, \ldots, e_r$ в пространстве представления $c(u)$ так, чтобы все матрицы $c(\gamma)$ были диагональны; это возможно, ибо матрицы $c(\gamma)$ перестановочны между собой. Тогда базисные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_r$ будут весовыми векторами представления $c(u)$. Пусть e_1 — вектор старшего веса; этот вес есть, по определению вес $\chi(\gamma)$ представления $c(u)$. Вес $\chi(\gamma)$ отличен от весов $\chi_2(\gamma), \ldots, \chi_r(\gamma)$ всех прочих базисных векторов $e_2, \ldots, e_r$, ибо, как известно, в пространстве неприводимого представления $c(u)$ есть (с точностью до числового множителя) только один вектор старшего веса. Из этого обстоятельства и из III вытекает, что $B_{1q}(\delta) = B_{p1}(\delta) = 0$ при $p \neq 1$, $q \neq 1$.

Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех функций $B_{11}(\varepsilon)$. Из предыдущего замечания и из IV заключаем:

* По поводу обозначений δ, ζ, $\beta(\delta)$ см. ([4]), §§ 1—4.

V. *Соответствие* $x(g) \to B_{11}(\varepsilon)$ *обладает следующими свойствами*:

1) *если* $x(g) \to B_{11}(\varepsilon)$, *то* $x^*(g) \to B_{11}(\varepsilon^{-1})$;

2) *если* $x(g) \to B_{11}^{(1)}(\varepsilon)$, $x_2(g) \to B_{11}^{(2)}(\varepsilon)$, *то* $\lambda_1 x_1(g) + \lambda_2 x_2(g) \to \lambda_1 B_{11}^{(1)}(\varepsilon) + \lambda_2 B_{11}^{(2)}(\varepsilon)$, $\int x_1(g_1) x_2(gg_1^{-1}) d\mu(g_1) \to \int B_{11}^{(1)}(\varepsilon') B_{11}^{(2)}(\varepsilon\varepsilon'^{-1}) d\mu(\varepsilon')$.

При таком определении действий $\mathfrak{B}$ есть коммутативное кольцо с инволюцией.

5. Группа S_0. Обозначим через S совокупность всех матриц s, осуществляющих подстановку единичных векторов $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Если $\gamma \in \Gamma$, то и $s^{-1}\gamma s \in \Gamma$. Обозначим далее через S_0 совокупность всех матриц $s \in S$ таких, что $\chi(s^{-1}\gamma s) = \chi(\gamma)$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Очевидно, S_0 — подгруппа группы S.

Обозначим через R_0'' совокупность всех функций $x(g) \in R_0'$ таких, что $B_{pq}(\delta) = 0$, если $\chi_p(s^{-1}\varepsilon s) \neq \chi(\varepsilon)$ или $\chi_q(s^{-1}\varepsilon s) \neq \chi(\varepsilon)$ ни при каком $s \in S'$.

VI. R_0'' — *коммутативное подкольцо кольца* R_0' (*а следовательно, и* R), *изоморфное кольцу* $\mathfrak{B}$.

VII. *Функции* $B_{11}(\varepsilon) \in \mathfrak{B}$ *удовлетворяют условию* $B_{11}(s^{-1}\varepsilon s) = B_{11}(\varepsilon)$ *для всех* $s \in S_0$.

6. Кольцо $\mathfrak{B}'$. Обозначим через $\mathfrak{B}'$ совокупность функций $\varphi(\varepsilon)$, непрерывно дифференцируемых до $2(r-1)(r-2)$-го порядка включительно, равных нулю вне некоторого компактного множества (своего для каждой функции) и удовлетворяющих условию $\varphi(s^{-1}\varepsilon s) = \varphi(\varepsilon)$ для всех $s \in S_0$.

VIII. *Множество* $\mathfrak{B}'$ *есть подкольцо кольца* $\mathfrak{B}$. *Если* $\varphi \in \mathfrak{B}'$, *то соответствующая функция* $x(g) \in R_0''$ *вычисляется по формуле* $x(u_1^{-1}\varepsilon u_2) = c \int L\varphi(\varepsilon') \overline{c_{11}(v_1 u_1)} c_{11}(v_2 u_2) dv_1$, *где* c — *некоторая постоянная*, $v_1 \varepsilon = \varepsilon' \zeta v_2$ *и где* L — *дифференциальный оператор, определенный в* ([4]) (§ 2б).

7. Функционал $F(x)$. Положим, что для $x(g) \in R$ $F(x) = \int x(g)(T_g^{-1} e_1, e_1) d\mu(g)$. Тогда $F(x)$ — положительный функционал в R, полностью определяющий (с точностью до эквивалентности) представление T_g.

IX. *Для всякой функции* $x(g) \in R$ *существует функция* $\hat{x}(g) \in \mathfrak{B}$ *такая, что* $F(\hat{x}) = F(x)$.

Здесь существенно используется, что $c(u)$ — представление с наинизшим весом, содержащееся в T_u.

В силу IX наша задача сводится к нахождению положительных функционалов $F(x)$ в кольце $\mathfrak{B}$ (к которому следует присоединить единицу).

8. Связь с максимальными идеалами кольца $\tilde{\mathfrak{B}}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{B}}$ кольцо $\mathfrak{B}$ с формально присоединенной единицей, так что $\mathfrak{B}$ — максимальный идеал в $\tilde{\mathfrak{B}}$. Пользуясь предложением IX, можно доказать, что:

X. *Представление* T_g *порождает максимальный симметрический идеал в* $\tilde{\mathfrak{B}}$, *отличный от* $\mathfrak{B}$. *Два таких представления* T_g, T_g', *порождающие один и тот же максимальный идеал в* $\tilde{\mathfrak{B}}$, *эквивалентны*.

Пользуясь предложением VIII, можно доказать (см. подробное рассуждение по аналогичному поводу в ([2])), что всякий максимальный идеал в $\mathfrak{B}$ определяется некоторой функцией $\chi(\varepsilon) = \varepsilon_1^{i\rho_1} \varepsilon_2^{i\rho_2} \ldots \varepsilon_r^{i\rho_r}$, где $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ — комплексные числа, пронормированные условием $\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_r = 0$. Две такие функции $\chi_1(\varepsilon)$ и $\chi_2(\varepsilon)$ определяют один и тот же максимальный идеал тогда и только тогда, когда $\chi_2(\varepsilon) =$

$=\chi(s^{-1}\varepsilon s)$, где $s \in S_0$. Условие симметричности максимального идеала накладывает дополнительные ограничения на числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$. Если, например, $S_0 = \{e\}$, то все эти числа должны быть действительными, и наш максимальный идеал совпадает с максимальным идеалом, порожденным некоторым представлением основной серии; следовательно, в этом случае представление T_g эквивалентно представлению основной серии. При $S_0 \neq \{e\}$ числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ могут быть и комплексными. В случае действительных чисел $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ представление T_g попрежнему эквивалентно одному из представлений основной серии. Если же некоторые или все числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_r$ комплексны, то условие симметрии и положительности соответствующего функционала $F(x)$ в кольце R накладывает ограничения на эти числа, из которых вытекает, что представление T_g эквивалентно одному из представлений дополнительной или основной вырожденной серии. Этим завершается доказательство основной теоремы, сформулированной в начале заметки.

Обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ совокупность всех матриц $u \in \mathfrak{A}$, для которых e_1 есть собственный вектор оператора $c(u)$. Очевидно, $\Gamma \subset \widetilde{\Gamma}$. Если $\Gamma = \widetilde{\Gamma}$, то представление T_g будет невырожденным; в противном случае T_g — вырожденное представление.

Поступило
9 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Вейль, Классические группы, их инварианты и представления, М., 1947. [2] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 11, 411 (1947). [3] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, 445 (1948). [4] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 36 (1950). [5] И. М. Гельфанд и М. А. Наймарк, Тр. Московск. матем. об-ва, 1 (1951). [6] М. А. Наймарк, Усп. матем. наук, 3, в 5, 52 (1948).