Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

А. Д. МЫШКИС

О СВЯЗИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ С РАСШИРЕНИЯМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 15 IV 1952)

В 1936 г. В. А. Ефремович ([1-3]) ввел новый класс пространств, названных им инфинитезимальными. Здесь будет показано, что теория этих пространств тесно связана с теорией расширений топологических пространств; более точно, в одном важном частном случае будет доказана полная двойственность этих теорий. Есть основания полагать, что такая двойственность имеет место в значительно более общем случае; при этом определение концов пространства должно быть изменено.

Буквой M мы обозначим фиксированное непустое регулярное топологическое пространство*; под **расширением** его мы будем понимать регулярное топологическое пространство R, в котором M всюду плотно, причем каждая точка $R \setminus M$ является пределом некоторой (счетной) последовательности точек M. Буквой G, быть может, с индексами, мы будем обозначать множества, открытые в M.

Мы говорим, что пространство M **превращено в инфинитезимальное пространство**, если для каждой пары его подмножеств A и B дано, находятся они или нет в соотношении близости (в записи $A\delta B$ или $A\bar{\delta}B$). При этом мы будем, во всяком случае, требовать, чтобы удовлетворялись следующие условия:

а) если $A\delta B$, то $B\delta A$;

б) если $A\delta B$, то $A \neq \Lambda$;

в) если $a \in M$, $A\delta\{a\}$ и $B\delta\{a\}$, то $A\delta B$;

г) если $a \in M$, то $A\delta\{a\}$ в том и только том случае, когда $a \in M[A]$ (под $M[A]$ понимается замыкание A в M).

Пространство M можно превратить в инфинитезимальное, вообще говоря, многими способами.

Непустую совокупность $\mathfrak{A}$ бесконечных подмножеств пространства M, превращенного в инфинитезимальное, мы будем называть **концом** этого пространства, если удовлетворяются условия:

α) если $A \in \mathfrak{A}$ и $B \in \mathfrak{A}$, то $A\delta B$;

β) если $a \in A \in \mathfrak{A}$, то $(A \setminus \{a\}) \in \mathfrak{A}$;

γ) если $A \bar{\in} \mathfrak{A}$ ($A \subseteq M$), то существует $G \subseteq M$ такое, что $A \cap G = \Lambda$, а для любого $B \in \mathfrak{A}$ будет $(B \cap G) \in \mathfrak{A}$;

δ) $\mathfrak{A}$ имеет по крайней мере один элемент $L_{\mathfrak{A}}$, обладающий следующими свойствами: все бесконечные подмножества $L_{\mathfrak{A}}$ являются эле-

* Терминология и обозначения приняты по книге ([4]).

ментами $\mathfrak{A}$; если $A \in \mathfrak{A}$ $(A \subseteq M)$, то $L_{\mathfrak{A}}$ имеет конечное подмножество K такое, что $A\bar{\delta}(L_{\mathfrak{A}} \setminus K)$.

Отметим, что из условия γ) сразу следует, что если $M \supseteq A \supset B \in \mathfrak{A}$, то $A \in \mathfrak{A}$.

Рассмотрим множество $\tilde{R}$, состоящее из всех точек M и из всех концов M. В $\tilde{R}$ мы введем топологию следующим образом. Если $G \subseteq M$, то под G^* мы будем понимать совокупность всех точек G и всех концов $\mathfrak{A}$ пространства M, для которых при $A \in \mathfrak{A}$ всегда $(A \cap G) \in \mathfrak{A}$. Будем считать каждое такое G^* окрестностью любого своего элемента. Тогда из соотношения $(G_1 \cap G_2)^* = G_1^* \cap G_2^*$ следует, что аксиомы системы окрестностей выполняются, т. е. $\tilde{R}$ является топологическим пространством, в котором M всюду плотно; при этом топология в M, индуцированная из $\tilde{R}$, совпадает с исходной. Легко проверяются утверждения:

$$\tilde{R}[G^*] = \tilde{R}[G], \tag{1}$$

$$\mathfrak{A} \in \tilde{R}[G^*] \text{ тогда и только тогда, когда } G \in \mathfrak{A}. \tag{2}$$

В предыдущем абзаце был описан переход от пространства M, превращенного в инфинитезимальное, к топологическому пространству $\tilde{R}$, содержащему M. Обратный переход совершается следующим образом. Пусть R — расширение пространства M. Тогда мы превратим M в инфинитезимальное пространство, считая, что $A\delta B$ $(A \subseteq M, B \subseteq M)$ тогда и только тогда, когда $R[A] \cap R[B] \neq \Lambda$. При этом условия а) — г) удовлетворяются. Ясно, что эквивалентные расширения (между которыми возможен гомеоморфизм, оставляющий точки M на месте) индуцируют одинаковое соотношение близости между подмножествами M.

Наша цель — установить условия, при которых переходы, описанные в двух предыдущих абзацах, обратны друг другу. Об этом говорят следующие две теоремы.

Теорема 1. *Расширение R пространства M индуцирует соотношение близости между подмножествами M, удовлетворяющее следующим требованиям:*

1) *если $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ — два различных конца M, то существует G такое, что $\mathfrak{A}_1 \in G^*$, $\mathfrak{A}_2 \bar{\in} G^*$;*

2) *если $a \in G$, то существует G_1 такое, что $a \in G_1$ и $\mathfrak{A} \in G^*$ для любого конца $\mathfrak{A}$, содержащего G_1;*

3) *если $\mathfrak{A} \in G^*$, то существует G_1 такое, что $M[G_1] \subseteq G$, $\mathfrak{A} \in G_1^*$ и $\mathfrak{A}_1 \in G^*$ для любого конца $\mathfrak{A}_1$, содержащего G_1;*

4) *если $A\delta B$ и $A \cap B = \Lambda$ $(A \subseteq M, B \subseteq M)$, то существует конец $\mathfrak{A}$ такой, что $A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{A}$.*

При этом пространство $\tilde{R}$, индуцируемое полученным соотношением близости в M, является расширением M, эквивалентным R. Эта эквивалентность задается так: каждому элементу $\alpha \in R \setminus M$ надо поставить в соответствие совокупность всех множеств $A \subseteq M$, для которых $\alpha \in R[A]$.

Доказательство. Прежде всего, если $\alpha \in R \setminus M$, то легко проверить, что совокупность $\mathfrak{A}_\alpha$ множеств $A \subseteq M$, для которых $\alpha \in R[A]$, образует конец M. Таким образом, возникает естественное отображение R в $\tilde{R}$; каждой точке M соответствует она сама, а каждой точке $\alpha \in R \setminus M$ соответствует $\mathfrak{A}_\alpha \in \tilde{R} \setminus M$. Проверим, что это — отображение на все $\tilde{R}$. Для этого возьмем произвольный конец $\mathfrak{A}$ и докажем, что найдется точка $\alpha \in R \setminus M$, для которой $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}$.

Множество $L_{\mathfrak{A}}$ не может иметь предельных точек в M. Действительно, пусть $a \in M$ — такая точка. Тогда, поскольку $\{a\} \overline{\in} \mathfrak{A}$, то, по определению, $L_{\mathfrak{A}}$ имеет конечное подмножество K такое, что $a \overline{\in} R[L_{\mathfrak{A}} \setminus K]$, что и требуется.

Однако $L_{\mathfrak{A}}$ имеет предельные точки в R. В самом деле, выберем в $L_{\mathfrak{A}}$ любым способом два бесконечных непересекающихся подмножества. По условию, они близки друг другу, т. е. их замыкания в R пересекаются. Легко проверить, что точка пересечения и будет искомой предельной точкой, причем единственной для всего $L_{\mathfrak{A}}$. Обозначим ее буквой α $(\alpha \in R \setminus M)$.

Проверим теперь, что $\mathfrak{A}_\alpha = \mathfrak{A}$. Действительно, пусть $A \overline{\in} \mathfrak{A}$ $(A \subset M)$. Тогда для конечного множества $K \subset L_{\mathfrak{A}}$ будет $A \overline{\delta} (L_{\mathfrak{A}} \setminus K)$, т. е. $\alpha \overline{\in} R[A]$ и $A \overline{\in} \mathfrak{A}_\alpha$. Обратно, пусть $A \overline{\in} \mathfrak{A}_\alpha$ $(A \subset M)$. Тогда для некоторого $H \subset R$, открытого в R, будет $\alpha \in H$, $R[H] \subseteq R \setminus R[A]$. Отсюда $(L_{\mathfrak{A}} \cap H) \in \mathfrak{A}$ и $(L_{\mathfrak{A}} \cap H) \overline{\delta} A$, т. е. $A \overline{\in} \mathfrak{A}$, что и требовалось.

Итак, построенное нами отображение f пространства R на $\tilde{R}$ — взаимно-однозначное. Проверим далее, что если H открыто в R и $R \setminus H \subseteq R[M \setminus H]$, то $f(H) = (H \cap M)^*$. В самом деле, точки M, входящие в обе части этого равенства, одни и те же. Пусть $\mathfrak{A}_\alpha \in f(H)$, т. е. $\alpha \in H \setminus M$. Тогда при $A \in \mathfrak{A}_\alpha$, т. е. $\alpha \in R[A]$, будет $\alpha \in R[A \cap H \cap M]$, откуда $(A \cap H \cap M) \in \mathfrak{A}_\alpha$; значит, $\mathfrak{A}_\alpha \in (H \cap M)^*$. Обратно, пусть $\mathfrak{A}_\alpha \overline{\in} f(H)$, т. е. $\alpha \in R \setminus (H \cup M)$. Тогда $\alpha \in R[M \setminus H]$, т. е. $(M \setminus H) \in \mathfrak{A}_\alpha$. Но $(M \setminus H) \cap (H \cap M) = \Lambda \overline{\in} \mathfrak{A}_\alpha$. Значит, $\mathfrak{A}_\alpha \overline{\in} (H \cap M)^*$, что и требовалось.

Докажем теперь, что отображение f является гомеоморфизмом. Для этого надо проверить, что H открыто в R тогда и только тогда, когда $f(H)$ открыто в $\tilde{R}$. Пусть H открыто в R и $a \in H$. Тогда имеется окрестность H_1 точки a такая, что $R[H_1] \subseteq H$. Но тогда при помощи (2) легко проверить, что $f(a) \in (H_1 \cap M)^* \subseteq f(H)$, т. е. $f(H)$ открыто в $\tilde{R}$. Пусть, обратно, $f(H)$ открыто в $\tilde{R}$ и $a \in H$. Тогда для некоторого G будет $f(a) \in G^* \subseteq f(H)$. Обозначим через H_1 множество, полученное присоединением к G всех точек $R \setminus M$, непредельных для $M \setminus G$. Тогда легко проверить, что H_1 открыто в R и $R \setminus H_1 \subseteq R[M \setminus H_1]$. Согласно предыдущему абзацу, $f(H_1) = (H_1 \cap M)^* = G^*$. Значит, $f(a) \in f(H_1) \subseteq f(H)$, т. е. $a \in H_1 \subseteq H$. Итак, H открыто в R и гомеоморфность отображения f доказана.

Справедливость утверждений 1) — 4) устанавливается с помощью (2). Значит, теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть пространство M превращено в инфинитезимальное, причем выполняются требования* 1) — 4). *Тогда пространство $\tilde{R}$, индуцируемое данным соотношением близости, является расширением M, индуцирующим, в свою очередь, соотношение близости в M, полностью тождественное исходному.*

Доказательство. Мы уже указали, что $\tilde{R}$ является топологическим пространством, в котором M всюду плотно. Из определения конца следует, что каждая точка $\mathfrak{A} \in \tilde{R} \setminus M$ является пределом последовательности точек M (именно, любой последовательности, состоящей из различных точек $L_{\mathfrak{A}}$). Проверим, что в $\tilde{R}$ имеет место 1-я аксиома отделимости. Действительно, возможность отделения точек M очевидна, а точек $\tilde{R} \setminus M$ — следует из требования 1). Пусть теперь даны $a \in M$ и $\mathfrak{A} \in \tilde{R} \setminus M$. Тогда $\mathfrak{A} \in (M \setminus \{a\})^* \overline{\ni} a$. С другой стороны, так как $\{a\} \overline{\in} \mathfrak{A}$, то $L_{\mathfrak{A}}$ имеет конечное подмножество K такое, что $\{a\} \overline{\delta} (L_{\mathfrak{A}} \setminus K)$, т. е. $a \in M[L_{\mathfrak{A}} \setminus K]$, откуда $a \in (M \setminus M[L_{\mathfrak{A}} \setminus M])^* \overline{\ni} \mathfrak{A}$, что и нужно.

Выполнение в $\tilde{R}$ 3-й аксиомы отделимости следует из требований 2) и 3) при помощи (1) и (2). Итак, $\tilde{R}$ является расширением.

Докажем, наконец, что $\tilde{R}$ индуцирует в M соотношение близости, совпадающее с исходным. Для этого надо убедиться в том, что $A\delta B$ $(A\subseteq M, B\subseteq M)$ тогда и только тогда, когда $\tilde{R}[A] \cap \tilde{R}[B] \neq \Lambda$. Однако, пусть $A\delta B$ и $A\cap B=\Lambda$. Тогда по требованию 4) для некоторого $\mathfrak{A}\in\tilde{R}\setminus M$ будет $A\in\mathfrak{A}$, $B\in\mathfrak{A}$. Но тогда $\mathfrak{A}\in\tilde{R}[A]\cap\tilde{R}[B]$, т. е. $\tilde{R}[A]\cap\tilde{R}[B]\neq\Lambda$. Обратно, пусть $\tilde{R}[A]\cap\tilde{R}[B]\neq\Lambda$. Если это пересечение содержит точки M, то $A\delta B$ по свойствам в) и г) близости. Если же это пересечение содержит конец $\mathfrak{A}$, но $A\bar{\delta}B$, то не может быть одновременно $A\in\mathfrak{A}$ и $B\in\mathfrak{A}$. Пусть, для определенности, $A\bar{\in}\mathfrak{A}$. Тогда найдется $G\subset M$ такое, что $\mathfrak{A}\in G^*$, и $A\cap G^*=\Lambda$. Значит, $\mathfrak{A}\bar{\in}\tilde{R}[A]$, что невозможно. Теорема 2 доказана.

Таким образом, установлена полная двойственность между всевозможными расширениями пространства M и всевозможными способами превращения его в инфинитезимальное пространство, при выполнении требований 1) — 4).

Выражаю свою благодарность Э. И. Вигант за ценное обсуждение ряда вопросов, связанных с этой заметкой.

Латвийский государственный университет

Поступило 13 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Ефремович, Усп. матем. наук, 4, 2 (30), 178 (1949). [2] В. А. Ефремович, Усп. матем. наук, 6, 4 (44), 203 (1951). [3] В. А. Ефремович, ДАН, 76, № 3, 341 (1951). [4] П. С. Александров, Введение в общую теорию множеств и функций, 1948.