Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

И. Г. МАЛКИН

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 11 III 1952)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения вида

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) + X_s'(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где обращающиеся при $x_1 = \cdots = x_n = 0$ в нуль функции X_s и X_s' определены в области

$$t \geqslant 0, \quad |x_s| \leqslant H. \tag{2}$$

При этом функции X_s либо вовсе не содержат t, либо являются непрерывными и периодическими функциями последнего с периодом ω. По отношению к x_j функции X_s обладают в области (2) непрерывными частными производными первого порядка. Величины X_s' являются функциями всех $n+1$ переменных t, x_j, по отношению к которым они в области (2) непрерывны. Кроме того, в указанной области эти функции удовлетворяют по отношению к переменным x_j условиям Коши — Липшитца или каким-нибудь другим условиям, обеспечивающим для уравнений (1) существование и единственность решения.

Теорема. *Если для функций X_s' выполняются соотношения*

$$\lim_{t\to\infty} X_s'(t, x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ равномерно в области } |x_s| \leqslant H \tag{3}$$

и если невозмущенное движение $x_1 = \cdots = x_n = 0$ для уравнений

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s(t, x_1, \ldots, x_n) \tag{4}$$

асимптотически устойчиво в смысле Ляпунова, то то же самое справедливо и для уравнений (1).

Доказательство. Так как для уравнений (4) имеет место асимптотическая устойчивость и так как эти уравнения по отношению к t периодичны, то, как показал Массера ([2]), для этих уравнений существует функция Ляпунова со знакоопределенной производной. При этом эта функция будет периодической относительно t. Другими словами, существует определенно-положительная функция $V(t, x_1, \ldots, x_n)$, периодическая относительно t, для которой выражение

$$V_1 = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s'$$

есть функция определенно-отрицательная.

Так как V по отношению к t периодична, то она допускает бесконечно малый высший предел (стремится равномерно относительно t к нулю при $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \to 0$). Для производной этой функции по t, составленной в силу полной системы уравнений (1), имеем

$$\frac{dV}{dt} = V_1 + \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_s} X_s'.$$

Отсюда, на основании (3), мы можем писать

$$\lim_{t\to\infty}\left(\frac{dV}{dt} - V_1\right) = 0 \quad \text{равномерно в области } |x_s| \leqslant H. \tag{5}$$

Таким образом, для уравнений (1) найдена допускающая бесконечно малый высший предел определенно-положительная функция V, для которой выполняется соотношение (5), где V_1 — функция определенно-отрицательная. А эти условия, как показано нами в ([1]), обеспечивают устойчивость движения. При этом, как показал Массера ([2]), устойчивость будет асимптотической, т. е. будут выполняться соотношения

$$\lim_{t\to\infty} x_s(t) = 0 \quad \text{при} \quad |x_s(0)| \leqslant \delta,$$

где δ — достаточно малое положительное число. Более того, Массера показал, что эти соотношения будут при указанных условиях выполняться равномерно в области $|x_s(0)| \leqslant \delta$.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького

Поступило
11 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. Малкин, ДАН, 18, № 3 (1938). [2] J. L. Massera, Ann. of Math., 50, No. 3, 705 (1949).