Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

М. С. ЛИВШИЦ

О ПРИВЕДЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ НЕЭРМИТОВЫХ ОПЕРАТОРОВ К „ТРЕУГОЛЬНОМУ" ВИДУ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 IV 1952)

1. Известно, что каждая матрица конечного порядка может быть приведена при помощи унитарного преобразования к треугольной форме, совпадающей в случае эрмитовой матрицы с диагональной формой. В бесконечномерном пространстве Гильберта этому соответствует спектральное разложение эрмитова оператора.

В настоящей заметке решается задача о приведении к „треугольному" виду линейных неэрмитовых операторов, определенных в пространстве Гильберта и подчиненных известным ограничениям.

Полученные при этом результаты могут быть применены к установлению критериев полноты систем главных функций интегральных уравнений и к исследованию разрешающих ядер в окрестности бесконечно удаленной точки.

2. Линейный ограниченный оператор A, определенный в гильбертовом пространстве H, можно представить в виде суммы „действительной" и „чисто мнимой" частей:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2i}(A - A^*)\, i = \mathrm{Re}\,(A) + i\,\mathrm{Im}\,(A).$$

Мы будем говорить, что оператор A принадлежит классу $(i\Omega)$, если его „мнимая часть" $\mathrm{Im}\,(A) = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ есть вполне непрерывный оператор со сходящейся суммой модулей собственных значений.

В частности, классу $(i\Omega)$ принадлежит любой интегральный оператор с ограниченным ядром $K(x, y)$ $(a \leqslant x,\ y \leqslant b)$, удовлетворяющим одному из следующих условий:

1) $\mathrm{Im}^* K = \frac{1}{2i}[K(x, y) - \overline{K(y, x)}]$ либо непрерывное эрмитово неотрицательное ядро, либо ядро, представимое в виде разности двух непрерывных неотрицательных ядер;

2) существует число ρ $(0 < \rho \leqslant 1)$, для которого

$$|\mathrm{Im}^*[K(x, y_2) - K(x, y_1)]| < |y_2 - y_1|^\rho \quad (a \leqslant x \leqslant b;\ a \leqslant y_1,\ y_2 \leqslant b).$$

Таким образом, в классе $(i\Omega)$ содержатся все интегральные операторы, „мнимые части" ядер которых дифференцируемы по y.

Мы скажем, что оператор A принадлежит классу (Ω), если его „реальная часть" $\mathrm{Re}\,(A) = {}^1/_2\,(A + A^*)$ есть вполне непрерывный оператор со сходящейся суммой модулей собственных значений. Исследование операторов класса (Ω), очевидно, сводится к исследованию операторов класса $(i\Omega)$.

3. Пусть A — оператор класса $(i\Omega)$. Рассмотрим наименьшее пространство E, содержащее элементы u вида $u = \mathrm{Im}(A) f$ $(f \in H)$.

Размерность r $(0 \leqslant r \leqslant \infty)$ подпространства E мы будем называть **неэрмитовым рангом** оператора A.

Подпространство E и его ортогональное дополнение $G = H \ominus E$ инвариантны относительно $\mathrm{Im}(A)$, причем $\mathrm{Im}(A)$ переводит G в нуль. Подпространство G мы назовем **фундаментом** оператора A. На G имеет место равенство $A = A^*$.

Максимальное инвариантное относительно A подпространство $G_{\text{доп}}$, входящее в фундамент, мы будем называть **дополнительной компонентой** фундамента.

Нетрудно видеть, что дополнительная компонента фундамента совпадает с ортогональным дополнением линейной замкнутой оболочки подпространств $A^n E$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Фундамент оператора называется **простым**, если его дополнительная компонента сводится к нулю.

С точки зрения теории неэрмитовых операторов дополнительная компонента $G_{\text{доп}}$ не представляет интереса, так как на $G_{\text{доп}}$ оператор A эрмитов, а $H \ominus G_{\text{доп}}$ инвариантно относительно A и не содержит дополнительной компоненты.

В дальнейшем существенную роль играет неэрмитова сигнатура. **Неэрмитовой сигнатурой** оператора A называется пара чисел (p, q) $(0 \leqslant p,\ q \leqslant \infty;\ p + q = r)$, где p и q — соответственно число положительных и число отрицательных квадратов формы $(\mathrm{Im}(A) f, f)$ $(f \in H)$.

4. В этом параграфе мы строим „треугольную“ модель $\mathbf{A}$ оператора класса $(i\Omega)$ с данным неэрмитовым рангом r $(0 < r \leqslant \infty)$ и данной неэрмитовой сигнатурой (p, q) $(p + q = r)$.

Пусть $\mathfrak{H}_r$ — эвклидово r-мерное пространство в случае $r < \infty$ и пространство Гильберта l_2 в случае $r = \infty$. Рассмотрим пространства $\mathbf{H}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{H}_{\mathrm{II}}$ всех вектор-функций $f(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $f(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ дискретного и непрерывного аргументов k и x соответственно, значения которых принадлежат $\mathfrak{H}_r$.

Образуем прямую сумму $\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\mathrm{I}} \oplus \mathbf{H}_{\mathrm{II}}$. Пространство $\mathbf{H}$ состоит из всех пар вида $f = \{f_{\mathrm{I}}, f_{\mathrm{II}}\}$, где $f_{\mathrm{I}} \in \mathbf{H}_{\mathrm{I}}$, а $f_{\mathrm{II}} \in \mathbf{H}_{\mathrm{II}}$. Скалярное произведение в $\mathbf{H}$ определим, как обычно, равенством

$$(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k)\, g^*(k) + \int_0^l f(x)\, g^*(x)\, dx,$$

где fg^* — скалярное произведение векторов евклидова пространства или пространства l_2, в зависимости от того, конечен или бесконечен ранг r.

Пусть $\alpha(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\alpha(x)$ $(0 < x \leqslant l)$ — неубывающие ограниченные числовые функции, причем $\alpha(x - 0) = \alpha(x)$, а $\beta(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\beta(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ — эрмитово неотрицательные матрицы r-го порядка с конечной абсолютной нормой ([1]).

Определим в $\mathbf{H}$ оператор $\mathbf{A}f = g$ равенствами:

$$g_{\mathrm{I}} = g(k) = f(k)\left[\alpha(k) + \frac{1}{2} i\beta(k) J\beta(k)\right] + \\ + i \sum_{j=k+1}^{\infty} f(j)\, \beta(j)\, J\beta(k) + i \int_0^l f(t)\, \beta(t)\, J\beta(k)\, dt; \qquad (1)$$

$$g_{\text{II}} = g(x) = \alpha(x) f(x) + i \int_x^l f(t)\,\beta(t)\,J\beta(x)\,dt \quad (0 \leqslant x \leqslant l), \tag{2}$$

где $J = \| \pm \delta_{kj} \|$ $(1 \leqslant k, j \leqslant r)$.

Теорема 1. *Допустим, что матрицы* $\beta(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ *и* $\beta(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$ *удовлетворяют условиям*

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{Sp} \beta^2(k) < \infty$; $\operatorname{Sp} \beta^2(x) \equiv 1$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$.

2) *Из* $u\beta(k) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $u\beta(x) = 0$ $(0 \leqslant x \leqslant l)$, $u \in \mathfrak{H}_r$ *следует* $u = 0$.

Тогда оператор $\mathbf{A}$ *обладает следующими свойствами:*

1) *Оператор* $\mathbf{A}$ *принадлежит классу* $(i\Omega)$.

2) *Ранг оператора* $\mathbf{A}$ *равен* r, *а числа* p *и* q *неэрмитовой сигнатуры равны, соответственно, количеству* $+1$ *и* -1 *матрицы* J.

3) *Невещественный спектр оператора* $\mathbf{A}$ *состоит из множества точек вида* $\lambda_k = \alpha(k) + {}^1/_2 i\gamma(k)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, *где* $\gamma(k)$ *любое, не равное нулю собственное значение матрицы* $\beta(k) J\beta(k)$. *Точки* λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$ *являются полюсами резольвенты. Линейная замкнутая оболочка* F *конечномерных инвариантных подпространств* F_k $(k = 1, 2, \ldots)$, *соответствующих точкам спектра* λ_k $(k = 1, 2, \ldots)$, *совпадает с* $\mathbf{H}_{\text{I}} \ominus \mathbf{H}_{\text{I доп}}$. *Подпространство* F *совпадает с* $\mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_{\text{доп}}$, *если длина* l *интервала* $(0, l)$ *равняется нулю. В этом случае* $\mathbf{H}$ *сводится к* $\mathbf{H}_{\text{I}}$, *а оператор* $\mathbf{A}f = g$ *определяется следующим образом:*

$$g = g(k) = f(k)\left[\alpha(k) + \frac{1}{2} i\beta(k) J\beta(k)\right] + i \sum_{j=k+1}^{\infty} f(j)\,\beta(j)\,J\beta(k) \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

4) *Спектр оператора* $\mathbf{A}$, *расположенный на вещественной оси, совпадает с множеством значений, принимаемых функцией* $\alpha(x)$ *на интервале* $0 < x \leqslant l$. *Эти значения являются, вообще говоря, существенно особыми точками резольвенты.*

Если оператор $\mathbf{A}$ *имеет чисто вещественный спектр, то* $\mathbf{H}$ *сводится к* $\mathbf{H}_{\text{II}}$, *а оператор* $\mathbf{A}f = g$ *определяется равенством:*

$$g = g(x) = \alpha(x) f(x) + i \int_x^l f(t)\,\beta(t)\,J\beta(x)\,dt \quad (0 \leqslant x \leqslant l). \tag{4}$$

5) *Сопряженный оператор* $\mathbf{A}^* f = g$ *представляется в виде:*

$$g_{\text{I}} = g(k) = f(k)\left[\alpha(k) - \frac{1}{2} i\beta(k) J\beta(k)\right] - i \sum_{j=1}^{k-1} f(j)\,\beta(j)\,J\beta(k) \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

$$g_{\text{II}} = g(x) = \alpha(x) f(x) - i \int_0^x f(t)\,\beta(t)\,J\beta(x)\,dt - i \sum_{j=1}^{\infty} f(j)\,\beta(j)\,J\beta(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l).$$

Оператор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условиям теоремы 1, мы будем называть моделью класса $(i\Omega)$.

Теорема 2. *Для всякого оператора* A *класса* $(i\Omega)$ *можно построить модель* $\mathbf{A}$ *и унитарное преобразование* U, *обладающие следующими свойствами:*

1) U *отображает взаимно-однозначно* $H \ominus H_{\text{доп}}$ *на* $\mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_{\text{доп}}$.

2) *Оператор* A, *определенный на* $H \ominus H_{\text{доп}}$, *переходит при этом отображении в свою модель* $\mathbf{A} = UAU^*$, *определенную на* $\mathbf{H} \ominus \mathbf{H}_{\text{доп}}$.

Доказательство этой теоремы основано на исследовании характеристической матрицы-функции ([2-7]) оператора, принадлежащего классу ($i\Omega$).

Поступило
17 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 5, 1947, стр. 392. [2] М. С. Лившиц, ДАН, 58, № 1 (1947). [3] М. С. Лившиц, Матем. сборн., 26 : 2 (1950). [4] М. С. Лившиц и В. П. Потапов, ДАН, 72, № 4 (1950). [5] В. П. Потапов, ДАН, 72, № 5 (1950). [6] М. С. Лившиц, ДАН, 60, № 1 (1948). [7] М. С. Лившиц, ДАН, 72, № 6 (1950).