Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 2

МАТЕМАТИКА

З. А. СКОПЕЦ

КРИВЫЕ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ КОНФИГУРАЦИЕЙ ДЕЗАРГА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 IV 1952)

В трехмерном вещественном проективном пространстве R_3 пять точек A_i общего положения определяют пучок пространственных кривых третьего порядка (C_3). Пересекая кривые пучка плоскостью R_2, не содержащей ни одной из данных точек A_i, получим в последней тройки точек, являющиеся вершинами трехвершинников, автополярных относительно определенной невырожденной кривой второго порядка C_2 ([1]). Кривая C_2 может быть действительной или мнимой, что зависит от положения точек A_i относительно R_2.

Точки A_i определяют в R_3 полный пятивершинник A_i, пересекающийся с R_2 по конфигурации Дезарга, автополярной относительно той же кривой C_2 (([2]), стр. 1006). Если одна, две или три прямые конфигурации касаются C_2, то такую конфигурацию будем называть соответственно однократно, двукратно и трехкратно вырожденной. Касательные прямые и их точки касания с C_2 будем называть особыми прямыми и точками конфигурации. Через особую точку проходят четыре прямые, а на особой прямой лежат четыре точки конфигурации. Невырожденную и вырожденные конфигурации будем обозначать, соответственно, через K_D, K_D^1, K_D^2, K_D^3* (([3]), стр. 130).

На каждой прямой из K_D кривая C_2 устанавливает сопряженную инволюцию. Если эта инволюция гиперболическая, то прямая пересекает C_2 в двух действительных точках, и C_2 будет действительной. Если же инволюция эллиптическая, то надо обратиться к рассмотрению сопряженной инволюции на одной из трех прямых, сопряженных с первой относительно C_2. Если хотя бы на одной из этих трех прямых также устанавливается эллиптическая инволюция, то C_2 будет мнимой кривой. Действительно, если на первой прямой инволюция эллиптическая, то полюс этой прямой лежит внутри кривой, если допустить, что C_2 — кривая действительная. Но тогда полярно сопряженные прямые пересекают C_2 в действительных точках, и инволюции на них не могут быть эллиптическими. Допущение приводит к противоречию, и C_2 должна быть мнимой.

Теорема. *Для того чтобы кривая C_2, относительно которой конфигурация Дезарга K_D автополярна, была мнимой, необходимо и достаточно, чтобы сопряженные инволюции хотя бы на двух сопряженных прямых конфигурации были эллиптическими.*

Автополярные трехвершинники относительно C_2 вырождаются, если две вершины трехвершинника совпадают. В таком случае эта сдвоенная

* В абстрактных проективных плоскостях эти конфигурации обозначаются по иному в зависимости от их ранга. Установившихся обозначений для них нет.

вершина $M_1 \equiv M_2 \equiv M$ непременно должна принадлежать C_2, а третья вершина M_3 должна лежать на касательной к C_2 в точке M. Такой случай вырождения автополярного трехвершинника может наступать лишь тогда, когда соответствующая кривая пучка (C_3) касается R_2. Это значит, что если в пучке (C_3) имеется хотя бы одна кривая, касательная к R_2, то таких кривых будет бесчисленное множество, и точки касания этих кривых принадлежат C_2. Более того, эти точки не только принадлежат C_2, но и заполняют C_2. Действительно, если через точки A_i и одну из точек C_2 провести кривую пучка (C_3), то последняя пересечет R_2 в трех точках, попарно автополярных относительно C_2, что неизбежно влечет за собой совпадение двух точек пересечения и, следовательно, касание кривой пучка с R_2 в выбранной на C_2 точке.

Теорема. *Если хотя бы одна кривая пучка пространственных кривых третьего порядка (C_3), заданного пятью своими различными центрами A_i, касается некоторой плоскости R_2, неинцидентной с A_i, то таких кривых в пучке будет бесчисленное множество и их точки касания принадлежат невырожденной кривой C_2, относительно которой трехвершинники, по которым кривые пучка пересекают R_2, равным образом как и конфигурация Дезарга K_D, по которой полный пятивершинник (A_i) пересекает R_2, автополярны.*

Имея в виду случай, когда кривая C_2 является действительной, исследуем соответствие $M_3 = \omega(M)$. В общем случае каждой точке M кривой C_2 соответствует определенная точка M_3 на касательной к C_2 в точке M. Обратно, точкой M_3, вообще говоря, определяется одна точка M на C_2, ибо точкой M_3 определяется кривая в пучке (C_3), и она не может быть отличной от той кривой пучка, которая определяется точкой M, так как в противном случае две различные кривые будут иметь шесть общих точек, что невозможно. Однако в соответствии ω имеются особые точки, где взаимная однозначность соответствия нарушена. Действительно, вырожденные автополярные трехвершинники получаются также и от некоторых вырожденных кривых пучка (C_3). Пусть через прямую p из K_D проходит плоскость $\pi \equiv (A_1 A_2 A_3)$. В таком случае через полюс P прямой p будет проходить прямая $A_4 A_5$. Если эта прямая пересекает π в точке A_{45}, то четыре точки A_1, A_2, A_3, A_{45} определяют пучок кривых второго порядка (C_2^{45}). Каждая кривая последнего пучка вместе с прямой $A_4 A_5$ определяет распавшуюся кривую из пучка (C_3). Следовательно, если P является одной вершиной автополярного трехвершинника, то две другие вершины должны лежать на прямой p и делить пару точек P_1, P_2, в которых p пересекает C_2, гармонически. Среди кривых пучка (C_2^{45}) имеются две кривые, касающиеся p в точках P_1 и P_2, так как на p мы имеем, по предположению, гиперболическую инволюцию. Это значит, что $P = \omega(P_1)$, $P = \omega(P_2)$, т. е. в то время когда M опишет C_2, точка M_3 дважды будет проходить через P.

Обозначим кривую, соответствующую кривой C_2 в соответствии ω, через C. Кривая C будет иметь в точке P двойную точку. Если прямая p кривую C_2 не пересекает, то C будет иметь в точке P изолированную двойную точку. Таким образом, C имеет в десяти точках K_D двойные точки — узлы или изолированные двойные точки. Эти точки соответствуют в ω десяти парам точек, в которых прямые K_D пересекают C_2. Так как между точками кривых C и C_2 существует взаимно-однозначное соответствие, которое нарушается в отдельных точках, а именно, в точках K_D, то оно является бирациональным. Помня, что кривая C_2 является уникурсальной и что бирациональное преобразование сохраняет ранг кривой, заключаем, что кривая C также является уникурсальной с десятью различными двойными точками. Если порядок кривой C обозначен через n, то из уравнения $^1/_2(n-1)(n-2)=10$ находим, что $n=6$. Таким образом, C является уникурсальной кривой шестого порядка с десятью различными двойными точками.

Если C_2 является мнимой, то и $C \equiv C_6$ будет мнимой кривой с десятью двойными изолированными точками.

Теорема. *Точки невырожденной конфигурации Дезарга однозначно определяют уникурсальную кривую шестого порядка C_6 с десятью двойными точками — узлами или изолированными двойными точками в точках K_D. Если кривая C_2, относительно которой K_D автополярна, является мнимой, то C_6 является также мнимой, и точки K_D являются изолированными двойными точками этой кривой. Если C_2 является кривой действительной, то и C_6 является действительной.*

Пусть проекция точки A_5 из точек A_1, A_2, A_3, A_4 на противолежащие грани тетраэдра $T(A_1A_2A_3A_4)$ обозначены через A_{15}, A_{25}, A_{35}, A_{45}. Если R_2 проходит через одну, две или три из этих точек, то в R_2 получим, соответственно, K_D^1, K_D^2, K_D^3.

Остановимся на случае K_D^1. Если четыре двойные точки кривой C_6 принадлежат прямой p, то эта прямая, имея с C_6 по крайней мере восемь общих точек, принадлежит всеми своими точками к C_6, и поэтому C_6 распадается на кривую пятого порядка C_5 и особую прямую p из K_D. Это усматривается также непосредственно, так как все точки касательной p к C_2 сопряжены с точкой касания, а поэтому все точки касательной принадлежат C_6. Кривая C_5 будет иметь в остальных шести точках K_D^1 двойные точки и будет проходить через четыре точки K_D^1, принадлежащие особой прямой p. Более того, кривая C_5 будет касаться прямой p в ее особой точке P. Действительно, когда прямая p становится касательной к C_2, то обе касательные к C_2 в точках P_1 и P_2 совпадают с p. Но тогда и касательные к C_6 в ее двойной точке P также совпадают. Учитывая, что направление касательной к C_6 в точке P в нашем случае совпадает с направлением прямой p, так как последняя содержится в C_6, то касательная к C_5 в точке P совпадает с p.

В случае K_D^2 кривая C_6 распадается на две особые прямые p и q из K_D^2, касательные к C_2, и уникурсальную кривую четвертого порядка C_4 с тремя двойными точками, не лежащими на особых прямых. Кривая C_4 будет касаться особых прямых p и q в особых точках P и Q. Отбрасывая от C_6 прямые p и q, мы отбрасываем дважды их точку пересечения и по одному разу еще шесть точек из K_D^2. Кривая C_4 будет, следовательно, иметь три двойные точки в точках K_D^2, не принадлежащие прямым p и q, она будет проходить через шесть точек из K_D^2, не принадлежащих одновременно прямым p и p, и будет, наконец, касаться особых прямых в особых точках.

Переходим к последнему случаю K_D^3. Кривая C_6 распадается на три особые прямые, не принадлежащие одному пучку, и кривую третьего порядка с одной двойной точкой, не принадлежащей особым прямым. Эта кривая третьего порядка будет касаться особых прямых в особых точках и будет проходить еще через три точки из K_D^3, не совпадающие с точками пересечения особых прямых. Короче, если в R_2 дан трехвершинник ABC и точка E, не принадлежащая его сторонам, и если проекции этой точки на стороны трехвершинника из противолежащих вершин обозначены через A_1, B_1, C_1, а поляра e точки E относительно трехвершинника ABC пересекает стороны трехвершинника соответственно в точках A_2, B_2, C_2, то существует единственная кривая третьего порядка с двойной точкой E, касающаяся сторон трехвершинника в точках A_1, B_1, C_1 и проходящая через точки A_2, B_2, C_2.

Теорема. *Вырожденные конфигурации Дезарга K_D^1, K_D^2, K_D^3 определяют соответственно однозначно уникурсальные кривые пятого, четвертого и третьего порядков с шестью, четырьмя и одной различными двойными точками в точках K_D^i, не принадлежащих особым прямым. Эти кривые касаются особых прямых в особых точках и проходят через те точки K_D^i, которые не принадлежат одновременно двум особым прямым конфигурации K_D^i.*

Ярославский государственный
педагогический институт
им. К. Д. Ушинского

Поступило
28 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Reye, Zs. Math. Phys., 13, 521 (1868). [2] З. А. Скопец, ДАН, 81, № 6, 1003 (1951). [3] Л. А. Скорняков, Усп. матем. наук, 6, в. 6 (46), 112 (1951).