Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Л. Д. КУДРЯВЦЕВ и Ю. Д. КАЩЕНКО

О ЗАМЕНЕ ПЕРЕМЕННОГО В ИНТЕГРАЛЕ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 IV 1952)

Настоящая заметка посвящена замене переменного в интеграле Лебега при снятии обычно встречающихся ограничений (см., например, [1]), налагаемых на интегрируемую функцию (например, ее непрерывность), на заданное отображение области (например, его непрерывная дифференцируемость). Мы отказываемся также от всех граничных условий.

Введем обозначения и предположения, которые выполняются всюду в дальнейшем: E^n обозначает n-мерное евклидово пространство; G — область в E^n; $y=\varphi(x)$ — дифференцируемое * и взаимно-однозначное отображение $G \ni x$ в $E^n \ni y$; $J(x)$ — якобиан этого отображения в точке $x \in G$; $\varphi^{-1}(y)$ — отображение, обратное отображению $\varphi(x)$. Как известно, в нашем случае образом области G является также область пространства E^n. Под мерой мы будем всегда понимать n-мерную меру Лебега и обозначать ее символом mes.

Для всякого измеримого множества $E \subseteq E^n$ и определенной на нем суммируемой функции $f(x)$ мы через $\int f(x)\,dE$ будем обозначать интеграл Лебега от функции $f(x)$ по множеству E.

Теорема 1. *Пусть $y=\varphi(x)$ — дифференцируемое и взаимно-однозначное отображение области $G \subseteq E^n$ в E^n и пусть якобиан $J(x)$ этого отображения и функция $f(x)$ суть функции с суммируемым квадратом на G.*

Тогда

$$\int f(x)\,|J(x)|\,dG = \int f(\varphi^{-1}(y))\,d\varphi(G). \tag{1}$$

Доказательство этой теоремы основано на следующей основной лемме:

Лемма. *Пусть F — компакт, $F \subset G$, якобиан $J(x)$ непрерывен на F, функция $f(x)$ определена и непрерывна на F.*

Тогда

$$\int f(x)\,|J(x)|\,dF = \int f(\varphi^{-1}(y))\,d\varphi(F). \tag{2}$$

Не останавливаясь на доказательстве этой леммы, которое не представляет большого труда, но несколько кропотливо, выведем из нее нашу теорему.

---

* В том смысле, что в каждой точке $x \in G$ существует полный дифференциал каждой из n функций, задающих отображение φ.

Заметим, прежде всего, что при наших ограничениях якобиан $J(x)$ всегда является измеримой функцией на G.

Пусть E — измеримое множество, $E \subseteq G$, $\operatorname{mes} E < +\infty$, функция $f(x)$ определена и измерима на E, а произведение $f(x)|J(x)|$ суммируемо на E. Пусть, далее, $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Тогда для всякого $k = 1, 2, \ldots$, на основании свойств измеримых множеств и теоремы Н. Н. Лузина, существует компакт $F_k \subseteq E$ такой, что $\operatorname{mes}(E - F_k) < \varepsilon_k$, а функция $f(x)$ и якобиан $J(x)$ непрерывны на F_k. Заметим, что из того, что образ множества меры нуль при отображении $\varphi(x)$ также имеет меру нуль, следует, что $\varphi(E)$ измеримо и $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{mes} \varphi(F_k) = \operatorname{mes} \varphi(E)$.

Далее, вследствие полной аддитивности интеграла, имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \int f(x)\,|J(x)|\,dF_k = \int f(x)\,|J(x)|\,dE$$

и

$$\lim_{k\to\infty} \int |f(x)\,J(x)|\,dF_k = \int |f(x)\,J(x)|\,dE;$$

наконец, в силу (2),

$$\int |f(\varphi^{-1}(y))|\,d\varphi(F_k) = \int |f(x)\,J(x)|\,dF_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а значит, для неотрицательной функции $|f(\varphi^{-1}(y))|$, определенной на измеримом множестве $\varphi(E)$, существует конечный предел $\lim\limits_{k\to\infty} \int |f(\varphi^{-1}(y))|\,d\varphi(F_k)$.

Следовательно, функция $|f(\varphi^{-1}(y))|$, а поэтому и просто функция $f(\varphi^{-1}(y))$ суммируемы на $\varphi(E)$ и имеет место формула (см. [2])

$$\lim_{k\to\infty} \int f(\varphi^{-1}(y))\,d\varphi(F_k) = \int f(\varphi^{-1}(y))\,d\varphi(E);$$

но, в силу (2),

$$\int f(\varphi^{-1}(y))\,d\varphi(F_k) = \int f(x)\,|J(x)|\,dF_k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

поэтому

$$\int f(\varphi^{-1}(y))\,d\varphi(E) = \int f(x)\,|J(x)|\,dE. \tag{3}$$

Пусть теперь $E \subseteq G$ есть произвольное измеримое множество, функция $f(x)$ измерима на E, и произведение $f(x)|J(x)|$ суммируемо на E. Тогда существует последовательность множеств $E_k \subseteq E$, $k = 1, 2, \ldots$, конечной меры таких, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k = E$. Повторяя дословно те же рассуждения, что и выше, с заменой F_k на E_k, мы без труда убеждаемся, что и в этом случае функция $f(\varphi^{-1}(y))$ суммируема на $\varphi(E)$ и имеет место формула (3).

Таким образом мы доказали следующую теорему, из которой при $E = G$ вытекает сформулированная ранее теорема 1:

Теорема 1′. *Пусть $y = \varphi(x)$ — дифференцируемое и взаимнооднозначное отображение области $G \subseteq E^n$ в E^n, E — измеримое множество, $E \subseteq G$. Пусть, далее, функция $f(x)$ определена и измерима на E, произведение $f(x)|J(x)|$ суммируемо на E.*

Тогда

$$\int f(x)\,|J(x)|\,dE = \int f(\varphi^{-1}(y))\,d\varphi(E).$$

Следствие 1. Пусть якобиан $J(x)$ суммируем на E; тогда

$$\int |J(x)|\,dE = \operatorname{mes}\varphi(E).$$

Следствие 2. Пусть якобиан $J(x)$ суммируем на G; тогда

$$\operatorname{mes}\varphi(G) < +\infty.$$

В заключение отметим, что теорема о замене переменного в интеграле Лебега остается в силе, если отказаться от требования суммируемости произведения $f(x)\,|J(x)|$, а требовать только суммируемость функции $f(\varphi^{-1}(y))$ на $\varphi(E)$.

Доказательство этого проводится в общем аналогично доказательству теоремы 1′, основываясь на основной лемме, следует только из существования интеграла $\int f(\varphi^{-1}(y))\,d\varphi(E)$ доказывать существование интеграла $\int f(x)\,|J(x)|\,dE$. Это можно сделать как и выше или с помощью положительной $f^{+}(x)$ и отрицательной $f^{-}(x)$ частей ([2]) функции $f(x)$ *.

Таким образом имеет место:

Теорема 2. *Пусть $y = \varphi(x)$ есть дифференцируемое и взаимнооднозначное отображение области $G \subseteq E^n$ в E^n, $J(x)$ — якобиан этого отображения, E — измеримое множество, $E \subseteq G$, функция $f(x)$ определена и измерима на E, а $f(\varphi^{-1}(y))$ суммируема на $\varphi(E)$.*

Тогда

$$\int f(\varphi^{-1}(y))\,d\varphi(E) = \int f(x)\,|J(x)|\,dE.$$

Замечая, что в наших предположениях образ измеримого множества есть измеримое множество, и полагая $f(x) \equiv 1$ на G, получаем:

Следствие. Пусть $\operatorname{mes}\varphi(E) < +\infty$, тогда якобиан $J(x)$ суммируем на E.

Поступило
10 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ш. Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, 2, 1933. [2] В. И. Смирнов, Курс высшей математики, 5, 1947.

* Так можно было, конечно, поступить и при доказательстве теоремы 1′.