Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 2

МАТЕМАТИКА

А. Г. СИГАЛОВ

ОБ УСЛОВИЯХ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТИ И АНАЛИТИЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 7 V 1952)

Существование непрерывных решений двумерных регулярных задач вариационного исчисления известно при общих предположениях относительно подъинтегрального выражения [1,2]. Однако доказательства дифференцируемости и аналитичности решений давались до сих пор лишь для частных задач [3-5].

В настоящей заметке даются условия, налагаемые на подъинтегральное выражение $F(x, y, z, p, q)$ двумерной регулярной задачи в непараметрической форме, при выполнении которых непрерывное решение обладает теми же свойствами дифференцируемости и аналитичности, что и подъинтегральное выражение.

Основной результат приводит к теоремам существования решения первой краевой задачи для уравнений вариационного исчисления в ряде случаев, в которых единственность решения не имеет места.

1. Теорема. *Пусть $F(x, y, z, p, q)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка включительно при $(x, y) \in D$ и при произвольных z, p, q и $z(x, y)$ — функция класса A^2*, дающая интегралу $\iint\limits_D F\,dx\,dy$ абсолютный минимум по сравнению со всеми функциями класса A^2, принимающими те же значения на границе области D.*

Пусть, кроме того, F удовлетворяет следующим условиям:

1) $|F_{pp}|,\ |F_{pq}|,\ |F_{qq}|,\ |F_{pz}|,\ |F_{qz}|,\ |F_{zz}| \leqslant M(R)$;

2) $|F_{zx}|^2,\ |F_{zy}|^2,\ |F_p|^2,\ |F_q|^2,\ |F|,\ |F_z|,\ |F_{px}|^\gamma,\ |F_{qx}|^\gamma,\ |F_{py}|^\gamma,$ $|F_{qy}|^\gamma \leqslant M(R)(p^2+q^2)$;

3) $F_{pp}\alpha^2 + 2F_{pq}\alpha\beta + F_{qq}\beta^2 \geqslant m(R)(\alpha^2+\beta^2)$, *где* $p^2+q^2 \geqslant L^2$; $L = L(R)$; $|z| \leqslant R$; $m(R), M(R) > 0$, $\gamma > 2$, α *и* β *произвольны.*

Тогда функция $z(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица в каждой замкнутой области $\overline{D}_1 \subset D$. Если вторые производные функции F удовлетворяют условию Гельдера в каждой замкнутой области $\overline{D}_1 \subset D$, то решение $z(x, y) \in C^{(2)}$ в D и его вторые производные также удовлетворяют условию Гельдера в каждой замкнутой области $\overline{D}_1 \subset D$. Если F аналитична, то и $z(x, y)$ аналитична.

Доказательство содержится в следующих пунктах.

---

* Определение класса A^2 см. в [6].

2. Отношение конечных разностей

$$Z^{(h)} = \frac{z(x+h) - z(x)}{h}$$

удовлетворяет следующему вариационному условию:

$$\iint\limits_G \{(aZ_x^{(h)} + bZ_y^{(h)} + dZ^{(h)} + r)\eta_x + (bZ_x^{(h)} + cZ_y^{(h)} + eZ^{(h)} + s)\eta_y + \\ + (dZ_x^{(h)} + eZ_y^{(h)} + fZ^{(h)} + t)\eta\}\,dx\,dy = 0, \tag{1}$$

где

$$a = \int_0^1 F_{pp}(x + th,\ y,\ \Phi_3,\ \Phi_1,\ \Phi_2)\,dt,$$

$$\Phi_1 = (1-t)\,z_x(x,\ y) + tz_x(x+h,\ y),$$

$$\Phi_2 = (1-t)\,z_y(x,\ y) + tz_y(x+h,\ y),$$

$$\Phi_3 = (1-t)\,z(x,\ y) + tz(x+h,\ y).$$

Коэффициенты $b,\ c,\ d,\ e,\ f,\ r,\ s,\ t$ определяются так же, как a, с заменой F_{pp}, соответственно, на F_{pq}, F_{qq}, F_{pz}, F_{qz}, F_{zz}, F_{px}, F_{qx}, F_{zx}; G — произвольная область, лежащая в D вместе с границей, и $\eta(x,y)$ — любая функция класса A^2 в G, равная нулю на границе области G.

Для подъинтегральных выражений $F = F(p,\ q)$, не зависящих от $(x,\ y,\ z)$, и решений $z(x,\ y)$, удовлетворяющих условию Липшица, это вариационное условие было известно ранее (7).

3. Из пункта 3 (6) следует, что для каждой точки $(a,\ b) \in D$ найдется достаточно малый квадрат

$$D^* = [a - k_1,\ a + k_1;\ b - k_1,\ b + k_1] \subset D,$$

на котором

$$\iint\limits_{D^*} \{|\operatorname{grad} Z^{(h)}| + |\operatorname{grad} \tilde{Z}^{(h)}|\}\,dx\,dy \leqslant L, \tag{2}$$

где $\tilde{Z}^{(h)} = \dfrac{z(x,\ y+h) - z(x,\ y)}{h}$ и L не зависит от h, $|h| < h_0$; h_0 таково, что при $(x,\ y) \in \overline{D}^*$, $|h_1|$, $|h_2| \leqslant h_0$ имеет место

$$(x + h_1,\ y + h_2) \in D.$$

Пусть $k = k_1/2$ и $\overline{D}_l = [a - k - l,\ \ a + k + l;\ \ b - k - l,\ \ b + k + l]$. Из (2) следует, что для каждого h, $|h| < h_0$, найдется $l(h)$, $0 < l(h) < k_1/2$, для которого линейный интеграл от $|\operatorname{grad} Z^{(h)}|$ на границе $D'_{l(h)}$ области $D_{l(h)}$ не превосходит $2L/k_1$, причем $Z^{(h)}$ на $D'_{l(h)}$ линейно абсолютно непрерывна. Отсюда получаем

$$\operatorname{Osc}\{Z^{(h)},\ D'_{l(h)}\} \leqslant L_1, \qquad |h| < h_0. \tag{3}$$

Из этого неравенства и из непрерывности функции $z(x,\ y)$ следует, что $|Z^{(h)}(x,\ y)| \leqslant L_2$, $(x,\ y) \in D'_{l(h)}$, где L_2 не зависит от h, $|h| < h_0$.

Далее, применяем к функции $Z^{(h)}$ и области $D_{l(h)}$ теорему пункта 1 (6). Получаем $|Z^{(h)}| < L_3$ при $(x,\ y) \in D_{l(h)}$. Так как $D_0 \subset D_{l(h)}$, $h < h_0$, то $|Z^{(h)}| < L_3$ при $(x,\ y) \in D_0$.

Точно так же получаем ограниченность функции $\tilde{Z}^{(h)}$ в достаточно малом квадрате $\tilde{D}_0$ с центром (a, b). Так как (a, b) — произвольная внутренняя точка области D, то получаем, что $z(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица в каждой замкнутой области $\overline{D}_1 \subset D$.

Принадлежность функции $z(x, y)$ классу $C^{(2)}$ следует из результата Ч. Моррея ([4]). Аналитичность $z(x, y)$ вытекает из ([4]) и из классической теоремы С. Н. Бернштейна ([8]).

4. С помощью доказанной выше теоремы можно обнаружить существование решения первой краевой задачи для уравнения вариационного исчисления

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x} F_p - \frac{\partial}{\partial y} F_q = 0 \tag{4}$$

в ряде случаев, в которых заранее неизвестно, что существует не более одного решения.

В качестве примера рассмотрим выражение $F = f(p, q) + g(x, y, z)$, удовлетворяющее следующим условиям:

a) F определена при $(x, y) \in \overline{D}$ и для всех p, q, z и непрерывна вместе с частными производными первого и второго порядка везде, где она определена; продполагается, что D — область с равномерно регулярной границей;

b) $f_{pp}\alpha^2 + 2f_{pq}\alpha\beta + f_{qq}\beta^2 \geqslant m(\alpha^2 + \beta^2)$ для всех p, q, α, β;

c) $f(p, q) \geqslant m(p^2 + q^2)$, $p^2 + q^2 \geqslant L^2$, $m > 0$;

d) $|f_p|, |f_q| \leqslant M\sqrt{p^2 + q^2}$; $|f_{pp}|, |f_{pq}|, |f_{qq}| \leqslant M$, $p^2 + q^2 \leqslant L^2$;

e) $m|z|^\gamma \leqslant g(x, y, z) \leqslant M|z|^\gamma$, $|z| > z_0$, $(x, y) \in \overline{D}$; γ — фиксированное число.

Из доказанной выше теоремы и из ([2]) следует, что первая краевая задача для уравнения (4) имеет решение для любой области D с равномерно регулярной границей ([2]) и для любых непрерывных значений на границе.

Поступило
5 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Сигалов, Усп. матем. наук, 6, № 2 (1951). [2] А. Г. Сигалов, ДАН, 73, № 5 (1950). [3] A. Haar, Math. Ann., 97, 124 (1927). [4] C. Morrey, Trans. Am. Math. Soc., 43, 127 (1938). [5] C. Morrey, Multiple Integral Problems in the Calculus of Variations and Related Topics, Univ. Calif. Publ. Mah., 1943. [6] А. Г. Сигалов, ДАН,. 81, № 4 (1951). [7] M. Schiffmann, Ann. of Math., 48, No. 2 (1947). [8] С. Н. Бернштейн, Math. Ann., 59, 20 (1904).