

Л. И. КОЛБИНА

**НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ В КОНФОРМНОМ
ОТОБРАЖЕНИИ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 IV 1952)

В настоящей заметке методом вариаций исследован ряд экстремальных вопросов.

1. Теорема 1. При заданных конечных различных a_1 и a_2 максимум J_0 величины $J = |f_1^{\alpha}(0) \cdot f_2^{\beta}(0)|$ ($\alpha > 0, \beta > 0$) относительно всевозможных систем функций $f_k(\zeta)$, $f_k(0) = a_k$ ($k = 1, 2$), регулярных в $|\zeta| < 1$ и однолистно отображающих $|\zeta| < 1$ на не налегающие друг на друга области B_1 и B_2 , достигается для функций, отображающих $|\zeta| < 1$ на области, в совокупности целиком покрывающие плоскость, причем $J_0 = A_{\alpha\beta} |a_1 - a_2|^{\alpha+\beta}$, где

$$A_{\alpha\beta} = \frac{4^{\alpha+\beta} \alpha^{\alpha} \beta^{\beta}}{|\alpha - \beta|^{\alpha+\beta}} \left| \frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}} \right|^{2V^{\alpha\beta}} \quad (A_{\alpha\alpha} = 1).$$

Доказательство. Пользуясь теоремой Г. М. Голузина (1), можно получить варьированные функции, зависящие от малого комплексного параметра h :

$$f_k^*(\zeta) = f_k(\zeta) + h \frac{\prod_{\nu=1}^2 (f_k(\zeta) - a_{\nu})}{f_k(\zeta) - z_0} \quad (z_0 \in \bar{B}_k, k = 1, 2); \quad (1)$$

$$f_k^*(\zeta) = f_k(\zeta) + h \frac{\prod_{\nu=1}^2 (f_k(\zeta) - a_{\nu})}{f_k(\zeta) - f_k(\zeta_0)} - h \frac{\zeta f'(\zeta)}{\zeta_0 f'^2(\zeta_0)} \frac{\prod_{\nu=1}^2 (f_k(\zeta_0) - a_{\nu})}{\zeta - \zeta_0} +$$

$$+ \bar{h} \zeta^2 f'_k(\zeta) \frac{\prod_{\nu=1}^2 (f_k(\zeta_0) - a_{\nu})}{\zeta_0 f_k'^2(\zeta_0)} \frac{1}{1 - \bar{\zeta}_0 \zeta} + O(|h|^2) \quad (f_k(\zeta_0) \in B_k, k = 1, 2). \quad (2)$$

Функции $f_k^*(\zeta)$ также принадлежат к рассматриваемому семейству функций. Пользуясь теоремой Кёбе, получим $|f_k'(0)| < 4 |a_1 - a_2|$ ($k = 1, 2$), и существование экстремальных функций следует из нормальности рассматриваемого семейства функций. Исходя из формулы (1) и произвольности $\arg h$, можно доказать, что область $\bar{B}_1 + \bar{B}_2$ не имеет внешних точек. Используя формулу (2) и произвольность $\arg h$, получаем дифференциальные уравнения для экстремальных функций:

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1 - z} + \gamma \frac{a_2 - a_1}{a_2 - z} + \frac{(z - a_1)(z - a_2)}{\zeta^2 z'^2} = 0 \quad \left(z = f_1(\zeta), \gamma = \frac{\beta}{\alpha} \right),$$

$$\delta \frac{a_1 - a_2}{a_1 - z} + \frac{a_2 - a_1}{a_2 - z} + \frac{(z - a_1)(z - a_2)}{\zeta^2 z'^2} = 0 \quad \left(z = f_2(\zeta), \delta = \frac{1}{\gamma} \right).$$

Пусть $\alpha \neq \beta$. Случай $\alpha = \beta$ сводится к задаче, поставленной и впервые решенной М. А. Лаврентьевым (2), а также Г. М. Голузиным (3). Из вида дифференциальных уравнений заключаем, что одна из областей будет ограниченной с аналитической границей, исключая точку $z' = \frac{a_2 - a_1 \gamma}{1 - \gamma}$, другая является дополнением первой до всей плоскости и имеет разрез по аналитической кривой от z' до ∞ . Точка z' будет кратной точкой границы, причем исходящие из нее граничные кривые пересекаются под углами $2\pi/3$. Интегрируя дифференциальные уравнения и определяя произвольные постоянные, найдем экстремальные функции, неявно определяемые уравнениями:

$$\frac{e^{i\alpha_1}}{\zeta} = \frac{\sqrt{z^*} + \sqrt{a}}{\sqrt{z^*} - \sqrt{a}} \left(\frac{\sqrt{z^*} + \sqrt{a\gamma}}{\sqrt{z^*} + \sqrt{a\gamma}} \right) \sqrt{\gamma},$$

где $z^* = (f_1(\zeta) - a_2)(1 - \gamma) + \gamma(a_1 - a_2)$, $a = a_1 - a_2$, α вещественное;

$$\frac{e^{i\alpha_2}}{\zeta} = \frac{\sqrt{z^{**}} + \sqrt{a}}{\sqrt{z^{**}} - \sqrt{a}} \left(\frac{\sqrt{z^{**}} - \sqrt{\delta a}}{\sqrt{z^{**}} + \sqrt{\delta a}} \right) \sqrt{\delta},$$

где $z^{**} = (\delta - 1)(f_2(\zeta) - a_2) + (a_1 - a_2)$, α_2 вещественное.

Под $\sqrt{z^*}$ и $\sqrt{z^{**}}$ понимаем те ветви функций, для которых при $\zeta = 0$ выражения $\sqrt{z^*} - \sqrt{a}$ и $\sqrt{z^{**}} - \sqrt{a}$ равны нулю. Отсюда найдем $f_1'(0)$ и $f_2'(0)$, а следовательно, и J_0 . П. П. Куфарев и А. Э. Фалес исследовали аналогичную задачу для функций, отображающих единичный круг на не налегающие друг на друга области, лежащие в единичном круге (4).

2. Рассмотрим теперь задачу на относительный экстремум. Для функций $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$, удовлетворяющих условиям теоремы 1, ищем максимум $J = |f_1'(0) \cdot f_2'(0)|$ при заданном $|f_1'(0)| = |c_1|$.

Как и при доказательстве теоремы 1, существование экстремальных функций очевидно. Далее, используя формулу

$$f_h^*(\zeta) = f_h(\zeta) + h \sum_{n=1}^2 A_n \frac{\prod_{k=1}^2 (f_k(\zeta) - a_k)}{f_h(\zeta) - z_n}, \quad z_n \in B_k \quad (n = 1, 2; k = 1, 2), \quad (1')$$

докажем отсутствие точек, внешних одновременно областям B_1 и B_2 . Для решения нашей экстремальной задачи рассматриваем вспомогательную задачу: ищем максимум J при $|f_1'(0) - c_1| \leq r$, $r > 0$. Используя формулу (2) и лемму Г. М. Голузина (5), найдем дифференциальные уравнения для экстремальных функций. Эти функции будут зависеть от r . Пусть r пробегает последовательность значений $r_n \rightarrow 0$, $n = 1, 2, \dots$; соответствующие экстремальные функции $f_{n,k}(\zeta)$ образуют нормальное семейство, и поэтому можно выбрать последовательности r_n так, что соответствующие функции $f_{n,k}(\zeta)$ сходятся в $|\zeta| < 1$ к некоторой регулярной функции $f_{0,k}(\zeta)$ ($k = 1, 2$).

Легко доказывается, что эти функции дают решение первоначально поставленной экстремальной задачи. Они удовлетворяют дифференциальным уравнениям, полученным из предыдущих предельным переходом:

$$\frac{a_1 - a_2}{a_1 - z} + \mu \frac{a_2 - a_1}{a_2 - z} + \frac{(z - a_1)(z - a_2)}{\zeta^2 z'^2} = 0 \quad (z = f_1(\zeta)),$$

$$\mu_1 \frac{a_1 - a_2}{a_1 - z} + \frac{a_2 - a_1}{a_2 - z} + \frac{(z - a_1)(z - a_2)}{\zeta^2 z'^2} = 0 \quad (z = f_2(\zeta)),$$

где μ и μ_1 — произвольные вещественные постоянные. Удастся доказать, что $\mu_1 = 1/\mu$ и $0 < \mu < \infty$. Интегрируя эти уравнения и определяя постоянные, полученные при интегрировании, находим далее $f_1'(0)$ и $f_2'(0)$, а следовательно, и J_0 :

$$J_0 = \frac{4^2 \mu}{|1 - \mu|^2} \left| \frac{1 - \sqrt{V\mu}}{1 + \sqrt{V\mu}} \right|^{V\mu + \sqrt{V\mu}} |a_1 - a_2| \quad (0 < \mu < \infty),$$

и μ определяется из условия:

$$|1 - \mu| \cdot \left| \frac{1 + \sqrt{V\mu}}{1 - \sqrt{V\mu}} \right|^{V\mu} = \frac{4 |a_1 - a_2|}{|c_1|}.$$

Легко доказать, что это уравнение при $\frac{4 |a_1 - a_2|}{|c_1|} > 1$ имеет единственный корень в промежутке $0 < \mu < \infty$. Отметим еще, что в случае $\mu \neq 1$ ($|c_1| \neq |a_1 - a_2|$) одна из экстремальных областей будет ограниченной, причем при $|c_1| > |a_1 - a_2|$ ограниченной будет B_2 , а при $|c_1| < |a_1 - a_2|$ ограниченной будет B_1 . В случае $|c_1| = |a_1 - a_2|$ B_1 и B_2 являются полуплоскостями. Этот случай соответствует задаче на абсолютный экстремум.

3. Поставим теперь следующую задачу: при заданном конечном a , отличном от нуля, ищется максимум J_0 величины

$$J = \left| \frac{f_1'^{\alpha}(0) f_2'^{\beta}(0)}{f_3'^{\gamma}(\infty)} \right| \quad (\alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0)$$

относительно всевозможных систем функций $f_k(\zeta)$ ($k = 1, 2, 3$) таких, что $f_1(\zeta)$ и $f_2(\zeta)$ регулярны в $|\zeta| < 1$, а $f_3(\zeta)$ регулярна, исключая простой полюс $\zeta = \infty$, в $|\zeta| > 1$, причем эти функции однолистно отображают первые две $|\zeta| < 1$, а третья $|\zeta| > 1$ на не налегающие друг на друга области B_k ($k = 1, 2, 3$), содержащие, соответственно, точки $a, 0, \infty$, так, что $f_1(0) = a, f_2(0) = 0, f_3(\infty) = \infty$.

Теорема 2. Для указанной задачи максимум достигается для функций, для которых область $\sum_{k=1}^3 \bar{B}_k$ целиком покрывает плоскость, причем

$$J_0 = A_{\alpha\beta\gamma} |a|^{\alpha+\beta-\gamma},$$

где

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \left| \frac{P}{Q} \right|; \quad P = 4^{\alpha+\beta+\gamma} \alpha^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} (\alpha - \beta - \gamma + 2\sqrt{\beta\gamma})^2 V^{\beta\gamma},$$

$$Q = (\alpha - \beta + \gamma + 2\sqrt{\alpha\gamma})^2 V^{\alpha\gamma} (\alpha + \beta - \gamma + 2\sqrt{\alpha\beta})^2 V^{\alpha\beta} (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - 2\alpha\beta - 2\alpha\gamma - 2\beta\gamma)^{1/2} (\alpha + \beta + \gamma - 2\sqrt{\alpha\beta} - 2\sqrt{\alpha\gamma} + 2\sqrt{\beta\gamma}).$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 1. Отметим, что при $\alpha = \beta = \gamma = 1$ $A_{111} = 64/81\sqrt{3}$. Этот результат получен Г. М. Голузиным⁽³⁾.

Поступило
28 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. М. Голузин, Матем. сборн., 19, 2, 203 (1946). ² М. А. Лаврентьев, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 5, 169 (1934). ³ Г. М. Голузин, Матем. сборн., 29, 2, 455 (1951). ⁴ П. П. Куфарев и А. Э. Фалес, ДАН, 81, № 6, 995 (1951). ⁵ Г. М. Голузин, Матем. сборн., 21, 1, 119 (1947).