Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 2

МАТЕМАТИКА

Ю. М. КРИКУНОВ

О РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА И ЛИНЕЙНОГО СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 IV 1952)

§ 1. Пусть $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ — функции, голоморфные, соответственно, внутри и вне простого, гладкого, замкнутого контура L, содержащего начало координат, причем $\varphi^-(z)$ исчезает на бесконечности.

Докажем предложение:

Если производная порядка m функции $\varphi^+(z)$ и производная порядка n функции $\varphi^-(z)$ существуют на L и удовлетворяют условию Гельдера, то сами функции представимы следующим образом:

$$\begin{gathered}\varphi^+(z)=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \mu(\tau)(\tau-z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_k z^k}{k!},\\ \varphi^-(z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(\tau)}{\tau^n}\left[(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)+\sum_{k=0}^{n-2}\beta_k\tau^{n-k-1}z^k\right]d\tau,\end{gathered}\tag{1}$$

где $\mu(\tau)$ — комплексная функция точек контура; c_k — произвольные комплексные постоянные; $\ln\left(1-\dfrac{z}{\tau}\right)_{z=0}=0$; $\ln\left(1-\dfrac{\tau}{z}\right)_{z=\infty}=0$; $\beta_k=\dfrac{(-1)^{k+1}C_{n-1}^{k+1}}{1}+\dfrac{(-1)^{k+2}C_{n-1}^{k+2}}{2}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}}{n-k-1}$ ($C_{n-1}^{k+1}, C_{n-1}^{k+2},\ldots,C_{n-1}^{n-1}$ — *биномиальные коэффициенты*).

Представим функции $d^m\varphi^+(z)/dz^m$ и $z^n d^n\varphi^-(z)/dz^n$ * с помощью интегралов типа Коши с одинаковой плотностью $\mu(t)$, удовлетворяющей условию Гельдера:

$$\frac{d^m\varphi^+(z)}{dz^m}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\tau-z},\quad z^n\frac{d^n\varphi^-(z)}{dz^n}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\pi(\tau)\,d\tau}{\tau-z}.$$

Это представление, как известно, единственно, причем $\mu(t)$ выражается по формуле Ю. В. Сохоцкого:

$$\mu(t)=\frac{d^m\varphi^+(t)}{dt^m}-t^n\frac{d^n\varphi^-(t)}{dt^n}.\tag{2}$$

* Здесь необходимо принять во внимание, что функция $d^n\varphi^-(z)/dz^n$ имеет на бесконечности нуль не ниже $n+1$-го порядка.

Тогда для функций $d^m\varphi^+(z)/dz^m$ и $d^n\varphi^-(z)/dz^n$ получим представления вида:

$$\frac{d^m\varphi^+(z)}{dz^m}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\tau-z}, \tag{3}$$

$$\frac{d^n\varphi^-(z)}{dz^n}=\frac{1}{2\pi i z^n}\int_L\frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\tau-z}. \tag{4}$$

Проинтегрировав соотношения (3), (4), соответственно, m, n раз по z, получим:

$$\varphi^+(z)=\frac{(-1)^m}{(m-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_L\mu(\tau)(\tau-z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)d\tau+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{c_kz^k}{k!}, \tag{5}$$

$$\varphi^-(z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau^n}(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)d\tau+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{d_kz^k}{k!}, \tag{6}$$

где c_k и d_k — произвольные комплексные постоянные. Разлагая в степенные ряды обе части равенства (5) в окрестности $z=0$ и обе части равенства (6) в окрестности $z=\infty$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z, получим выражения для этих постоянных:

$$c_k=-\frac{(-1)^m\,k!}{(m-1)!}\frac{\alpha_k}{2\pi i}\int_L\mu(\tau)\tau^{m-k-1}\,d\tau+\frac{d^k\varphi^+(0)}{dz^k}\qquad(k=0,1,\ldots,m-1),$$

$$\alpha_0=0,\quad \alpha_k=\frac{1}{k}-\frac{C^1_{m-1}}{k-1}+\frac{C^2_{m-1}}{k-2}-\ldots+\frac{(-1)^{k-1}C^{k-1}_{m-1}}{1}\qquad(k>0);$$

$$d_k=\frac{(-1)^n\,k!}{(n-1)!}\frac{\beta_k}{2\pi i}\int_L\mu(\tau)\tau^{-k-1}\,d\tau\qquad(k=0,1,\ldots,n-1),$$

$$\beta_k=\frac{(-1)^{k+1}C^{k+1}_{n-1}}{1}+\frac{(-1)^{k+2}C^{k+2}_{n-1}}{2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}C^{n-1}_{n-1}}{n-k-1}\quad(k<n-1),\ \beta_{n-1}=0.$$

Подставляя значение постоянных c_k и d_k, соответственно, в (5) и (6), получим

$$\varphi^+(z)=\frac{(-1)^m}{(m-1)}\frac{1}{2\pi i}\int_L\mu(\tau)\left[(\tau-z)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{\tau}\right)-\sum_{k=1}^{m-1}\alpha_k\tau^{m-k-1}z^k\right]d\tau+$$
$$+\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{k!}\frac{d^k\varphi^+(0)}{dz^k}z^k, \tag{7}$$

$$\varphi^-(z)=\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\mu(\tau)}{\tau^n}\left[(\tau-z)^{n-1}\ln\left(1-\frac{\tau}{z}\right)+\sum_{k=0}^{n-2}\beta_k\tau^{n-k-1}z^k\right]d\tau. \tag{8}$$

Если значения $\varphi^+(0)$, $d\varphi^+(0)/dz,\ldots,d^{m-1}\varphi^+(0)/dz^{m-1}$ не задаются, то представление для $\varphi^+(z)$ удобнее использовать в форме (5).

§ 2. Пусть $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$ и L означают то же самое, что и выше. Под обобщенной краевой задачей Римана мы будем понимать следующую задачу.

Определить функции $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$, если предельные значения этих функций и их производных удовлетворяют на контуре L соотношению:

$$\sum_{k=0}^{m}\left[a_k(t)\frac{d^k\varphi^+(t)}{dt^k}+\int_L A_k(t,t_1)\frac{d^k\varphi^+(t_1)}{dt_1^k}dt_1\right]-$$

$$-\sum_{k=0}^{n}\left[b_k(t)\frac{d^k\varphi^-(t)}{dt^k}+\int_L B_k(t,t_1)\frac{d^k\varphi^-(t_1)}{dt_1^k}dt_1\right]=f(t), \qquad (9)$$

где $a_k(t)$, $b_k(t)$, $f(t)$, $A_k(t,t_1)$, $B_k(t,t_1)$ — заданные функции точек контура L; $a_k(t)$, $b_k(t)$, $f(t)$ удовлетворяют условию Гельдера; $a_m(t)$ и $b_n(t)$ не обращаются в нуль нигде на L; $A_k(t,t_1)$ и $B_k(t,t_1)$ имеют вид:

$$A_k(t,t_1)=\frac{A_k^0(t,t_1)}{|t_1-t|^\lambda},\quad B_k(t,t_1)=\frac{B_k^0(t,t_1)}{|t_1-t|^\lambda},$$

где $0\leqslant\lambda<1$, а $A_k^0(t,t_1)$, $B_k^0(t,t_1)$ удовлетворяют условию Гельдера.

Используя интегральное представление (1), легко убедиться, что решение задачи (9) сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром типа Коши:

$$\frac{1}{2}\left[a_m(t)+\frac{b_n(t)}{t^n}\right]\mu(t)+\frac{1}{2\pi i}\left[a_m(t)-\frac{b_n(t)}{t^n}\right]\int_L\frac{\mu(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+$$

$$+\int_L K(t,\tau)\mu(\tau)\,d\tau=g(t), \qquad (10)$$

где $K(t,\tau)$ — определенная функция такого же характера, что и функции $A_k(t,t_1)$, $B_k(t,t_1)$; $g(t)$ — функция, удовлетворяющая условию Гельдера и содержащая произвольные постоянные.

Теория такого уравнения хорошо разработана (см., например, [2]).

Интегральное уравнение (10) эквивалентно краевой задаче (9) в том смысле, что каждому решению $\mu(t)$ уравнения (10) соответствует по формулам (1) определенное решение краевой задачи (9), и наоборот, каждому решению $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$ краевой задачи (9) соответствует по формуле (2) определенное решение интегрального уравнения (10).

Краевую задачу, аналогичную задаче (9), рассмотрел впервые Л. Г. Магнарадзе. В работе [1] он дал список формул, относящихся к решению этой задачи, без всякого указания на способ их получения. Подробного решения, обещанного автором, не последовало.

Данное здесь решение основано на совершенно иных принципах, чем решение Л. Г. Магнарадзе. Интегральное уравнение (10) несравненно проще полученного им уравнения. Кроме того, интегральное уравнение, полученное этим автором, вообще говоря, неэквивалентно исходной краевой задаче.

§ 3. К решению краевой задачи вида (9) сводится решение линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения:

$$\sum_{k=0}^{p}\alpha_k(t)\,\nu^{(k)}(t)+\sum_{k=0}^{q}\left[\frac{\beta_k(t)}{\pi i}\int_L\frac{\nu^{(k)}(\tau)\,d\tau}{\tau-t}+\int_L N_k(t,\tau)\,\nu^{(k)}(\tau)\,d\tau\right]=f(t), \qquad (11)$$

где $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$, $f(t)$ удовлетворяют условию Гельдера; $N_k(t,\tau)$ — функции такого же характера, что и $A_k(t,t_1)$; дополнительно предполагается, что $\alpha_p(t)$ не обращается в нуль, если $p>q$; $\beta_q(t)$ не обращается в нуль, если $p<q$; $\alpha_p(t)+\beta_q(t)$ и $\alpha_p(t)-\beta_q(t)$ не обращаются в нуль, если $p=q$.

Решение $\nu(t)$ ищется в классе функций, дифференцируемых до l-го порядка включительно ($l=\max\{p,q\}$), причем так, что $\nu^{(l)}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера.

Для сведения уравнения (11) к краевой задаче вида (9) используется известная подстановка

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\nu(\tau)\, d\tau}{\tau - z},$$

причем в случае разрешимости полученной краевой задачи решение уравнения дается формулой:

$$\nu(t) = \varphi^+(t) - \varphi^-(t).$$

В заключение приношу глубокую благодарность проф. Ф. Д. Гахову за руководство работой.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
23 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Г. Магнарадзе, Сообщ. АН Груз.ССР, 4, № 2 (1943). [2] Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, 1945.