

Р. Э. ВИНОГРАД

**НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ
ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 IV 1952)

В заметке будут изложены некоторые критерии ограниченности решений системы

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt} &= a(t)y_1 + b(t)y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} &= c(t)y_1 + d(t)y_2\end{aligned}\tag{1}$$

на полуоси $0 \leq t < \infty$ и обобщение этих критериев на определенный класс нелинейных систем 2-го порядка.

Положим $p(t) = a(t) - d(t)$ и $q(t) = b(t) + c(t)$ и будем изучать лишь те системы (1), для которых $p^2(t) + q^2(t) > 0$ и существуют непрерывные dp/dt и dq/dt . Коэффициенты (1) предполагаются непрерывными.

Лемма 1. Замена переменных $y = U(t)x$ ($x = \{x_1, x_2\}$ и $y = \{y_1, y_2\}$ — векторы) с непрерывно дифференцируемой ортогональной матрицей $U(t)$, вида которой не требуется знать для выполнения нижеследующих вычислений, приводит систему (1) к виду

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \lambda(t)x_1 - \omega(t)x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \omega(t)x_1 - \mu(t)x_2,\end{aligned}\tag{2}$$

где (у функций опускаем аргумент t) $\lambda = \frac{a+d}{2} + \frac{Vp^2+q^2}{2}$, $\mu = \frac{a+d}{2} - \frac{Vp^2+q^2}{2}$ и $\omega = \frac{b-c}{2} + \frac{1}{2} \frac{pq' - p'q}{p^2+q^2}$. В случае необходимости знать $U(t)$ последняя задается формулой

$$U(t) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \\ \cos \varphi(t) & \sin \varphi(t) \end{pmatrix},$$

где $\varphi(t)$ — непрерывная ветвь функции $\arctg \frac{-p - Vp^2+q^2}{q}$.

Приведение (1) к виду (2) выполнимо и не только в случае $p^2 + q^2 > 0$; например, можно показать, что оно всегда осуществимо, когда коэффициенты (1) — аналитические функции, а также и при более широких условиях, допускающих обращение $p^2 + q^2$ в нуль. Мы

не будем касаться их, ибо ограничение $p^2 + q^2 > 0$ все равно в дальнейшем используется. Так как переход от (1) к (2) совершается ортогональным преобразованием $U(t)$, то $\|y\| = \|U(t)x\| = \|x\|$, и потому в смысле ограниченности решений (1) и (2) эквивалентны. В дальнейшем будем изучать только (2). Здесь вместо четырех коэффициентов осталось лишь три, что в случае постоянных коэффициентов (1) (а значит и (2)) позволяет построить в пространстве (λ, μ, ω) простую геометрическую модель классификации Пуанкаре, в которой седлам, узлам и фокусам отвечают области, вырожденным седлам, вырожденным узлам и центрам — поверхности, и остальным типам расположения интегральных кривых — линии.

Критерий неустойчивости (1) в применении к (2) является обобщением того случая постоянных коэффициентов, которому в пространстве коэффициентов отвечает область седел; этот критерий гласит:

Пусть $\lambda(t) > 0$, $\mu(t) > 0$ и $\int_0^{\infty} \lambda(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} \mu(\tau) d\tau = \infty$. Обозначим

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\lambda(t)}{\mu(t)} = \Gamma_0^2 \quad \text{и} \quad \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|\omega(t)|}{\lambda(t) + \mu(t)} = \Delta_0.$$

Все решения системы (2), кроме, может быть, берущих начало на некоторой прямой в плоскости (x_1, x_2) , неограничены при $t \rightarrow \infty$, если $\Delta_0 < \frac{\Gamma_0}{1 + \Gamma_0^2}$.

Здесь выписано условие лишь для того случая, когда $0 < \Gamma_0 \leq 1$, ибо в случае $\Gamma_0 > 1$ для системы двух уравнений тот же вывод следует уже из формулы Лиувилля, т. е. имеет место независимо от величины $|\omega(t)|$.

Из условия $\Delta_0 < \frac{\Gamma_0}{1 + \Gamma_0^2} \leq \frac{1}{2}$ вытекает, что, начиная с некоторого t , будет $\frac{|\omega(t)|}{\lambda(t) + \mu(t)} \leq \frac{1}{2}$ или $\frac{2|\omega(t)|}{\lambda(t) + \mu(t)} \leq 1$. Из выполнения обратного неравенства

$$\frac{2|\omega(t)|}{\lambda(t) + \mu(t)} > 1 \tag{3}$$

при некоторых добавочных условиях следует ограниченность всех решений (2). Ввиду непрерывности функций, входящих в (3), из (3) видно, что либо $\omega(t) > 0$, либо $-\omega(t) > 0$. Можно ограничиться изучением только первого случая, ибо второй сводится к нему заменой переменных в (2): $\tilde{x}_1 = -x_1$, $\tilde{x}_2 = x_2$. Мы будем пользоваться условием $\sup \int_0^{\infty} [\lambda(\tau) - \mu(\tau)] d\tau < \infty$, которое, в силу формулы Лиувилля,

является необходимым для ограниченности решений (2), а также условием $p^2(t) + q^2(t) > 0$, которое в обозначениях системы (2) принимает вид $\lambda(t) + \mu(t) > 0$. Функцию $\frac{2\omega(t)}{\lambda(t) + \mu(t)}$ обозначим через $h(t)$, причем будем еще предполагать, что $h'(t)$ существует и непрерывна.

Нижеследующие теоремы являются обобщением случая устойчивых фокусов и центров для систем с постоянными коэффициентами; они доказываются при различных предположениях о поведении функций $\lambda(t)$ и $\mu(t)$, с одной стороны, и $h(t)$, с другой, причем условия теорем варьируются с тем, чтобы за счет повышения одних требований снижать другие. Аргумент t у всех функций будем опускать.

Теорема 1. Если $h \geq 1 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число, а h' не меняет знака, то решения системы (2) ограничены. Если интеграл $\int_0^t (\lambda - \mu) d\tau$ не только ограничен сверху, но стремится к $-\infty$, то решения стремятся к нулю.

Теорема 2. Пусть $\lambda - \mu \leq 0$. Если $h \geq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ сколь угодно мало) и выполнено одно из двух неравенств

$$\frac{\lambda - \mu}{2} (h^2 - 1) - h' \leq 0 \quad \text{или} \quad \frac{\lambda - \mu}{2} (h^2 - 1) + h' \leq 0,$$

то решения (2) ограничены.

Теорема 3. Пусть h' меняет знак лишь в дискретном множестве точек, точнее, пусть существует такая последовательность $t_k \rightarrow \infty$, что $h' \leq 0$ на сегментах $T_{2n} = [t_{2n-1}; t_{2n}]$ и $h' \geq 0$ на сегментах $T_{2n+1} = [t_{2n}; t_{2n+1}]$ ($n = 1, 2, \dots$). Обозначим через H функцию, совпадающую с $-h'$ на сегментах T_{2n} и равную нулю на сегментах T_{2n+1} (иначе говоря, $H(t) = \frac{|h'(t)| - h'(t)}{2}$). Если существует такое число $\varepsilon > 0$, что $h \geq 1 + \varepsilon$ и

$$\sup \int_0^t \left(\frac{1}{\varepsilon} H + \lambda - \mu \right) d\tau < \infty,$$

то решения (2) ограничены. Если же этот интеграл стремится к $-\infty$, то решения стремятся к нулю.

Теорема 4. Пусть существует последовательность $t_k \rightarrow \infty$, такая, что $\lambda - \mu \leq 0$ на сегментах $T_{2n} = [t_{2n-1}; t_{2n}]$ и $\lambda - \mu \geq 0$ на сегментах $T_{2n+1} = [t_{2n}; t_{2n+1}]$ ($n = 1, 2, \dots$). Пусть $F = \frac{(\lambda - \mu) + |\lambda - \mu|}{2}$

и $f = \frac{(\lambda - \mu) - |\lambda - \mu|}{2}$. Если $h > 1$, $h' \geq f \frac{h^2 - 1}{2}$ и $\int_0^\infty F d\tau$ сходится, то решения (2) ограничены. Если $h \geq 1 + \varepsilon$ и $h' \leq -f \frac{h^2 - 1}{2}$, то решения (2) также ограничены.

Следующие теоремы обобщают случай устойчивых узлов.

Здесь будут использованы такие ограничения:

- 1) $\lambda(t)$, $\mu(t)$ и $\omega(t)$ непрерывны;
- 2) выполняются неравенства $\lambda(t) > 0$, $\mu(t) > 0$ и $\sqrt{\lambda(t)\mu(t)} \leq \omega(t) \leq \frac{\lambda^2(t) + \mu^2(t)}{2\sqrt{\lambda(t)\mu(t)}}$;
- 3) функция $g(t) = \lambda(t)/\mu(t)$ имеет непрерывную производную и удовлетворяет условию $g(t) < 1$.

Будем обозначать через $\eta(t)$ функцию $\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\lambda(t)}{\mu(t)}} + \sqrt{\frac{\mu(t)}{\lambda(t)}} \right) = \frac{1}{2} \left(\sqrt{g(t)} + \frac{1}{\sqrt{g(t)}} \right)$.

Теорема 5. Если $g(t) \leq 1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ как угодно мало), а $g'(t)$ не меняет знака, то решения (2) ограничены.

Теорема 6. Пусть существует разбиение полуоси $0 \leq t < \infty$ на сегменты T_1, T_2, \dots , выполняющие для $\eta'(t)$ такую же роль, как для $h'(t)$ в теореме 3, и пусть $\mathcal{H}(t)$ построена из $\eta'(t)$ так же, как $H(t)$ из $h'(t)$ в теореме 3. Если $\eta(t) \geq 1 + \varepsilon$, а интеграл $\int_0^\infty \mathcal{H}(\tau) d\tau$ сходится, то решения (2) ограничены.

Теоремы 1—6 все доказываются посредством построения для системы (2) вполне определенной функции Ляпунова, найти которую позволяет специальный вид (2). В выражение для этой функции входят некоторые произвольные параметры, различный выбор которых приводит к теоремам 1—6. Тем же приемом удается охватить еще ряд случаев, не предусмотренных в теоремах 1—6, однако формулировки соответствующих критериев вне конкретной задачи весьма громоздки. Для нелинейных систем 2-го порядка можно доказать следующие обобщения изложенных теорем.

Пусть дано уравнение

$$x' = L(t)x + f(t, x), \quad (4)$$

где $L(t) = \begin{pmatrix} \lambda(t) - \omega(t) \\ \omega(t) - \mu(t) \end{pmatrix}$, а $f(t, x)$ — вообще нелинейный непрерывный оператор, обеспечивающий существование и единственность решений (4) и такой, что

$$\|f(t, x)\| \leq g_k(t) \|x\|$$

в круге радиуса K с центром в начале координат; $g_k(t)$ — непрерывная функция. На $L(t)$ наложим те же ограничения, что и для теорем 1—4.

Теорема 7. *Тривиальное решение уравнения (4) устойчиво при $t \rightarrow \infty$, если выполнены условия (аргумент t опускаем):*

1) $h \geq 1 + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ сколь угодно мало);

2) $\sup_0^t \left(\frac{\lambda - \mu}{2} + g_k \sqrt{\frac{h+1}{h-1}} \right) d\tau < \infty$;

3) h' не меняет знака.

Теорема 8. *Тривиальное решение (4) устойчиво, если*

1) $h \geq 1 + \varepsilon$;

2) $\frac{\lambda - \mu}{2} + g_k \sqrt{\frac{h+1}{h-1}} \leq 0$

и выполняется одно из двух условий:

3а) $\frac{\lambda - \mu}{2} + g_k \sqrt{\frac{h+1}{h-1}} - \frac{h'}{h^2 - 1} \leq 0$;

3б) $\frac{\lambda - \mu}{2} + g_k \sqrt{\frac{h+1}{h-1}} + \frac{h'}{h^2 - 1} \leq 0$.

При $f(t, x) \equiv 0$ теоремы 7 и 8 переходят, соответственно, в теоремы 1 и 2.

Теоремы 1—6 позволяют установить устойчивость некоторых систем с сильно колеблющимися коэффициентами, например, некоторых почти-периодических систем; основная же область применения этих теорем — системы со слабо колеблющимися коэффициентами. Для случая систем с постоянными коэффициентами они превращаются в необходимые и достаточные признаки устойчивости.

Институт математики и механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Р. Э. Виноград, ДАН, 84, № 2 (1952).