Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

С. С. БЮШГЕНС

О ЛИНИЯХ ТОКА. II

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 IV 1952)

В своей предыдущей статье [1] я пытался установить характерные геометрические свойства конгруенции линий тока стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости. Однако только одно из полученных мною условий содержало геометрические элементы конгруенции, из второго же мне не удалось исключить кинематические элементы. Оказывается, что путем небольшого изменения примененного метода можно получить оба условия в чисто геометрическом виде.

Возьмем в каждой точке $\overline{M}$ потока репер J_1, J_2, J_3 трех единичных попарно ортогональных векторов; тогда

$$d\overline{M} = \omega_0^\alpha J_\alpha,$$

$$dJ_1 = rJ_2 - qJ_3, \quad dJ_2 = pJ_3 - rJ_1, \quad dJ_3 = qJ_1 - pJ_2.$$

Положим

$$p = p_\alpha \omega_0^\alpha, \quad q = q_\alpha \omega_0^\alpha, \quad r = r_\alpha \omega_0^\alpha.$$

Будем считать, что J_3 есть направление скорости

$$\overline{V} = VJ_3,$$

так что поле (J_3) огибает линии тока.

Принимая

$$2\overline{\omega} = \operatorname{rot} \overline{V} = \omega^\alpha J_\alpha, \quad H = \frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + U,$$

мы получим основные уравнения движения в следующем виде:

$$dH = V^2(-b\omega_0^1 + a\omega_0^2), \tag{1}$$

$$\frac{dV}{V} = \omega + (-b\omega_0^1 + a\omega_0^2), \tag{2}$$

где

$$a = \frac{\omega^1}{V}, \quad b = \frac{\omega^2}{V},$$

$$\omega = Jd\overline{M} = q_3\omega_0^1 - p_3\omega_0^2 + (p_2 - q_1)\omega_0^3. \tag{3}$$

Поле векторов

$$J = \frac{dJ_3}{ds} - (\operatorname{div} J_3) J_3 = q_3J_1 - p_3J_2 + (p_2 - q_1) J_3, \tag{4}$$

где dJ_3/ds есть вектор кривизны линии тока и $-\operatorname{div} J_3 = p_2 - q_1$ есть средняя кривизна векторного поля (J_3), я назвал присоединенным полем для поля (J_3).

Возьмем теперь вместо системы (1) и (2) равносильную ей систему:

$$-d\left(H - \frac{V^2}{2}\right) = V^2\omega, \tag{5}$$

$$\frac{dV}{V} = \omega + (-b\omega_0^1 + a\omega_0^2). \tag{2}$$

Внешнее дифференцирование уравнения (5) даст:

$$2(-b\omega_0^1 + a\omega_0^2)\,\omega + \omega' = 0. \tag{6}$$

Умножая внешним образом левую часть на ω_0^1, ω_0^2, ω, мы получим три условия:

$$2a(p_2 - q_1)\,\delta + \omega'\omega_0^1 = 0, \tag{7}$$

$$2b(p_2 - q_1)\,\delta + \omega'\omega_0^2 = 0, \tag{8}$$

$$\omega'\omega = 0, \tag{9}$$

где δ есть внешнее произведение трех основных форм:

$$\delta = \omega_0^1\omega_0^2\omega_0^3.$$

Здесь я исключаю случай минимальной конгруенции ($p_2 - q_1 = 0$) ибо вопрос о том, когда она может быть принята за конгруенцию линий токов стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости, мною подробно разобран ранее ([2]). В случае же $p_2 - q_1 \neq 0$ уравнения (7) и (8) определяют a и b, т. е. отношения двух первых компонентов двойного вихря к величине скорости.

Известно, что внешняя производная какой-либо формы Пфаффа

$$\omega = J d\overline{M}$$

равна двойному потоку вихря вектора J через выбранную элементарную площадку:

$$\omega' = \operatorname{rot} J\, d\overline{M}\,\delta\overline{M}.$$

Так как векторное произведение двух смещений $d\overline{M}$ и $\delta\overline{M}$ будет

$$d\overline{M} \times \delta\overline{M} = J_1\omega_0^2\omega_0^3 + J_2\omega_0^3\omega_0^1 + J_3\omega_0^1\omega_0^2,$$

то окончательно мы можем написать:

$$\omega' = (J_1 \operatorname{rot} J)\,\omega_0^2\omega_0^3 + (J_2 \operatorname{rot} J)\,\omega_0^3\omega_0^1 + (J_3 \operatorname{rot} J)\,\omega_0^1\omega_0^2.$$

Пользуясь этим выражением для внешней производной формы ω', из уравнений (7) и (8) мы получим

$$\begin{aligned} 2a(p_2 - q_1) &= -J_1 \operatorname{rot} J, \\ 2b(p_2 - q_1) &= -J_2 \operatorname{rot} J \end{aligned} \tag{10}$$

При этих значениях a и b мы имеем:

$$-b\omega_0^1 + a\omega_0^2 = -b(J_1 d\overline{M}) + a(J_2 d\overline{M}) = -\frac{(J_1 \times J_2)(\operatorname{rot} J \times d\overline{M})}{2(p_2 - q_1)},$$

или, окончательно:

$$-b\omega_0^1 + a\omega_0^2 = \frac{\operatorname{rot} J \times J_3}{2(p_2 - q_1)} d\overline{M}. \tag{11}$$

Итак, условие интегрируемости уравнения (5), во-первых, позволяет определить два компонента вихря, во-вторых, дает требование на самую конгруенцию линий тока, именно требование, намечаемое соотношением (9). Это последнее обозначает, что форма Пфаффа вполне интегрируема, или, что то же самое, поле присоединенных векторов допускает ортогональное семейство поверхностей, как это и было мною показано в статье ([1]).

Далее должно выполняться условие интегрируемости второго основного уравнения (2) или условие

$$\omega' + (-b\omega_0^1 + a\omega_0^2)' = 0. \tag{12}$$

На основании значения формы ω и формы (11), это последнее условие можно также представить в виде:

$$\left[\left(J + \frac{\operatorname{rot} J \times J_3}{2(p_2 - q_1)}\right) d\overline{M}\right]' = 0. \tag{12'}$$

Назовем поле векторов

$$J^* = J + \frac{\operatorname{rot} J \times J_3}{2(p_2 - q_1)} \tag{13}$$

вторичным присоединенным полем векторов к полю J_3; условие (12'), очевидно, обозначает, что вторичное присоединенное поле есть поле градиентных векторов, т. е.

$$\operatorname{rot} J^* = 0.$$

Итак, для того, чтобы заданная конгруенция линий могла быть принята за конгруенцию линий тока некоторого стационарного потока идеальной несжимаемой жидкости, необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1) поле присоединенных векторов данной конгруенции должно допускать семейство ортогональных поверхностей и 2) вторичное присоединенное поле векторов должно быть полем градиентных векторов.

Если уже первое присоединенное поле является градиентным, то

$$\operatorname{rot} J = 0, \quad a = b = 0, \quad \operatorname{rot} J^* = \operatorname{rot} J = 0,$$

и данная конгруенция линий является конгруенцией линий тока (стационарного) винтового потока идеальной несжимаемой жидкости, как это было обнаружено мною ранее ([3]).

Научно-исследовательский институт
математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
10 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. С. Бюшгенс, ДАН, **78**, № 5 (1951). [2] С. С. Бюшгенс, Изв. АН СССР сер. матем., **12**, № 5, 481 (1948). [3] С. С. Бюшгенс, Научн. зап. Моск. гидро-мелиорат. ин-та, **17**, 71 (1948).