

М. М. ВАЙНБЕРГ

**О НЕПОДВИЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЯХ ПРОИЗВЕДЕНИЯ
НЕКОТОРЫХ ОПЕРАТОРОВ**

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 24 IV 1952)

1°. В настоящей заметке вариационным методом устанавливается существование неподвижных направлений у операторов вида $BF(x)$, где B есть самосопряженный вполне непрерывный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H , а F есть заданный в H потенциальный оператор. Оператор, действующий из банахова пространства E в сопряженное пространство \bar{E} , называется потенциальным (12), если он является градиентом некоторого функционала, заданного в E . Если в некоторой односвязной области оператор $F(x)$ имеет слабый (в смысле Гато) линейный дифференциал $DF(x, h)$, то можно показать, что для потенциальности $F(x)$ необходимо и достаточно, чтобы для произвольных $h_1, h_2 \in E$

$$(DF(x, h_1), h_2) = (DF(x, h_2), h_1).$$

Говорят, что $x_0 \in E$ есть элемент с неподвижным направлением оператора T , если

$$Tx_0 = \mu x_0, \quad \|x_0\| > 0, \quad |\mu| > 0.$$

Элемент с неподвижным направлением есть собственный элемент оператора T , если T оставляет инвариантным нулевой элемент пространства, т. е. если $T\theta = \theta$.

Следует отметить, что не всякий собственный элемент оператора T есть элемент с неподвижным направлением, так как собственный элемент определяется лишь условием

$$Tx_0 = \mu x_0, \quad \|x_0\| > 0.$$

2°. Теорема 1. Пусть выполнены условия:

1. $F(x)$ есть потенциальный оператор, непрерывный и ограниченный в любом шаре $\|x\| \leq r$ вещественного гильбертова пространства H .

2. $(F(x), x) \geq \alpha(x, x)^\gamma$, $\alpha > 0$, $\gamma > 0$.

3. B есть самосопряженный вполне непрерывный оператор в H , который имеет конечное число положительных и произвольное число отрицательных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ($0 < |\lambda_k| \leq |\lambda_{k+1}|$).

Тогда имеют место следующие утверждения:

а) Оператор $BF(x)$ имеет множество элементов с неподвижным направлением W , причем мощность W не менее, чем счетна.

б) Из W можно выделить последовательность элементов, нормы которых неограниченно возрастают.

в) Из множества W можно выделить последовательность элементов, нормы которых убывают к нулю.

г) Каждый элемент из W преобразуется оператором BF в элемент того же луча, т. е., если $x_0 \in W$, то

$$BF(x_0) = \mu_0 x_0, \quad (1)$$

где $\mu_0 > 0$.

д) Если B имеет конечное число собственных значений, то мощность множества W не меньше континуума.

е) Если оператор B имеет собственные значения лишь одного знака, то требование ограниченности F является лишним. В этом случае, если отказаться от условия 2, то можно утверждать, что уравнение (1) имеет не менее счетного числа геометрически различных решений, отвечающих действительным значениям параметра μ . Если $F(\theta) = \theta$, то из этих решений (собственных элементов) можно выделить последовательность решений, нормы которых убывают к нулю.

Из данной теоремы, как частный случай, следует результат работы (9), где впервые вариационным методом было доказано существование собственных функций у нелинейного интегрального уравнения

$$\mu u(x) = \int_D K(x, y) g(u(y), y) dy \quad (2)$$

с непозитивным ядром $K(x, y)$.

Затем из данной теоремы следует теорема 8 работы М. Голomba (14), теорема Л. Лихтенштейна (15) об уравнении (2), теорема 2 работы (13) и некоторые другие теоремы, установленные автором для уравнения (2).

Идея доказательства сформулированной здесь теоремы та же, что в работе (9). Отличие состоит лишь в деталях выкладок. Например, вместо семейства функций, рассмотренного в работе (9), мы здесь рассматриваем корень квадратный из абсолютного значения оператора

$$B_{1/2}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, x_k)}{\sqrt{|\lambda_k|}} x_k,$$

оператор

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x, x_k) e_k}{\sqrt{|\lambda_k|}} x_k \quad (e_k = \text{sgn } \lambda_k)$$

(x_k — собственные векторы оператора B , отвечающие собственным значениям λ_k), которые вполне непрерывны, причем

$$AB_{1/2} = B_{1/2}A = B,$$

и пользуемся следующим свойством градиента функционала: если $\text{grad } f(x) = F(x)$, то для всякого самосопряженного оператора A , действующего в H ,

$$\text{grad } f(Ax) = AF(Ax).$$

3°. Основой дальнейшего исследования вопроса о неподвижных направлениях оператора BF служит теория, созданная Л. А. Люстерником (1) и развитая в работах В. И. Соболева (3), Э. С. Цитланда

(5-8) и Л. А. Люстерника (2). К этим работам примыкает и работа автора (10).

Теорема 2. Пусть выполнены условия:

1. $F(x)$ есть непрерывный потенциальный оператор, заданный в вещественном гильбертовом пространстве H .

2. $F(-x) = -F(x)$ и при $\|x\| > 0$ $(F(x), x) > 0$.

3. B есть положительный самосопряженный вполне непрерывный оператор в H .

Тогда уравнение

$$\mu x = BF(x), \quad x \in H,$$

при всяком $c > 0$ имеет не менее счетного числа попарно линейно независимых собственных элементов, представимых в виде

$$\psi_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\gamma_k^{(\nu)}}{\sqrt{\lambda_k}} x_k, \quad (\gamma_1^{(\nu)}, \gamma_2^{(\nu)}, \dots) = \gamma^{(\nu)} \in l_2, \quad \nu = 1, 2, \dots,$$

где $\|\gamma^{(\nu)}\| = c$; x_k , λ_k — собственные векторы и числа оператора B . Эти собственные элементы оператора BF соответствуют собственным значениям, представимым в виде

$$\mu_\nu = \frac{1}{c^2} (\psi_\nu, F(\psi_\nu)),$$

причем μ_ν образуют убывающую последовательность, сходящуюся к нулю.

Из данной теоремы, как частный случай, следует теорема для нелинейных интегральных уравнений, впервые установленная В. И. Соболевым (4), а также теорема 3 работы (10).

Для доказательства сформулированной теоремы мы рассматриваем оператор

$$B^{1/2}\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{\sqrt{\lambda_k}} x_k, \quad \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots) \in l_2,$$

который действует из l_2 в H , пользуемся теоремой 2 работы (10) и следующим свойством градиента функционала: если $\text{grad} f(x) = F(x)$, $x \in H$, то

$$\text{grad} f(B^{1/2}\xi) = \Phi(\xi) = (\Phi_1\xi, \Phi_2\xi, \dots),$$

где

$$\Phi_i\xi = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} (x_i, F(B^{1/2}\xi)).$$

Отметим еще, что данная теорема 2 переносится на некоторые (не гильбертовы) специальные пространства (ср. (11), теорема 2).

Поступило
22 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. А. Люстерник, Изв. АН СССР, сер. матем., № 3, 257 (1939).
² Л. А. Люстерник, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова АН СССР, 19 (1947).
³ В. И. Соболев, ДАН, 31, № 8 (1941). ⁴ В. И. Соболев, ДАН, 71, № 5 (1950).
⁵ Э. С. Цитландадзе, ДАН, 53, № 4 (1946). ⁶ Э. С. Цитландадзе, ДАН, 56, № 1 (1947). ⁷ Э. С. Цитландадзе, ДАН, 57, № 9 (1947). ⁸ Э. С. Цитландадзе, Усп. матем. наук, 5, 4 (38), 141 (1950). ⁹ М. М. Вайнберг, ДАН, 78, № 6 (1951).
¹⁰ М. М. Вайнберг, ДАН, 75, № 5 (1950). ¹¹ М. М. Вайнберг, ДАН, 80, № 3 (1951). ¹² М. М. Вайнберг, Усп. матем. наук, 7, 1 (47), 144 (1952). ¹³ М. М. Вайнберг, Матем. сборн., 30 (72), № 1, 3 (1952). ¹⁴ М. Golomb, Math. Zs., 39, H. 1 (1934). ¹⁵ L. Lichtenstein, Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen, Berlin, 1931, S. 154—156.