Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 3

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

В. А. ТАФТ

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ФИЗИЧЕСКОГО ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ МАТРИЦЫ ПОЛНОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ (ПРОВОДИМОСТИ) $2m$-ГО РАНГА В ВИДЕ ПАССИВНОГО МНОГОПОЛЮСНИКА*

(Представлено академиком А. В. Винтером 24 X 1951)

За последние годы теория электрических цепей получила большое развитие. В частности, были исследованы необходимые и достаточные условия физического осуществления двухполюсников и четырехполюсников по заданной функции и матрице полного сопротивления. Точно так же были исследованы необходимые условия осуществления многополюсников ([1], [2]). Вопрос о достаточных условиях до последнего времени оставался открытым ([3]). Настоящая работа посвящена рассмотрению вопроса о достаточности условия положительности (полуположительности) и действительности** матрицы полного сопротивления (проводимости), которое, как известно, является необходимым условием для физического осуществления пассивного многополюсника. Доказательство достаточности этого условия сводится к указанию общего метода физического осуществления положительной действительной (полуположительной) матрицы.

Осуществление положительной действительной матрицы в общем случае может быть проведено на основании следующих теорем.

Теорема I. *Всякая положительная матрица может быть представлена в виде суммы двух полуположительных матриц.*

Теорема II. *Если определитель действительных частей $\bar{z}$-матрицы на мнимой оси p равен нулю, то определитель z-матрицы на мнимой оси p равен нулю при $\omega = 0$ и при $\omega = \infty$.*

Теорема III. *Если матрица полных сопротивлений положительная (полуположительная), то обратная матрица также положительная (полуположительная).*

Здесь теоремы I и III известны из алгебры. Доказательство теоремы II может быть проведено аналогично доказательству соответствующей теоремы для частного случая матрицы 2-го ранга ([2]).

Методика осуществления многополюсников по заданной положительной матрице в общем случае может быть сведена к следующим операциям.

---

* Достаточность условия положительности матрицы полного сопротивления (проводимости) для осуществления ее в виде пассивного многополюсника была указана ранее (([2]), стр. 231). В настоящей работе кратко приводится доказательство, не помещенное в указанной статье.

** Т. е. действительности всех элементов матрицы при действительном значении p.

А. Согласно теореме I разлагаем заданную определенно положительную матрицу на две полуположительные. Эта операция может быть разбита на четыре этапа.

1. По заданной $\overline{z}$-матрице $\|z_{ik}(p)\|$ (или $\overline{y}$-матрице) находим матрицу действительных частей элементов на мнимой оси p-плоскости $\|\operatorname{Re} z_{ik}(j\omega)\|$.

2. Приводим определенно положительную матрицу $\|\operatorname{Re} z_{ik}(j\omega)\|$ к каноническому виду $\overline{A}_1$ посредством линейного преобразования $\overline{A}_1 = \overline{C}\overline{A}\overline{B}$, где $\overline{C}$ и $\overline{B}$ матрицы, элементы которых являются рациональными функциями $j\omega$, а их определители являются положительными действительными постоянными [4], и определяем элементарные делители.

3. Матрицу $\overline{A}_1$, имеющую каноническую форму, представляем в виде суммы двух полуположительных диагональных матриц, элементы которых являются положительными действительными функциями $\overline{A}_1 = \overline{A}_1' + \overline{A}_1''$, после чего снова переходим от матрицы $\overline{A}_1$ к матрице $\overline{A}$, представленной в виде двух полуположительных матриц.

$$\overline{A} = \overline{C}^{-1}\overline{A}_1\overline{B}^{-1} = \overline{C}_1^{-1}(\overline{A}_1' + \overline{A}_2'')\,\overline{B}^{-1} = \overline{C}_1^{-1}\overline{A}_1'\overline{B}^{-1} + $$
$$+ \overline{C}_1^{-1}A_1''B_1^{-1} = \|\operatorname{Re} z_{ik}^{(1)}(j\omega)\|. \quad (1)$$

4. От полученной таким образом суммы двух полуположительных матриц $\|\operatorname{Re} z_{ik}^{(1)}(j\omega)\| + \|\operatorname{Re} z_{ik}^{(2)}(j\omega)\|$ мы перейдем к сумме матриц $\|z_{ik}^{(1)}(p)\| + \|z_{ik}^{(2)}(p)\|$. Определение $z_{ik}(p)$, если известно $\operatorname{Re} z_{ik}(j\omega)$, всегда возможно. В частном случае, когда z_{ik} дробно-рациональная функция, такой переход может быть проведен известными методами весьма просто. При этом мы сначала предположим, что $\|z_{ik}^{(1)}(p)\|$ и $\|z_{ik}^{(2)}(p)\|$ не вырождаются.

Подобное разложение исходной матрицы на две интерпретируется в виде разложения схемы многополюсника, соответствующей исходной матрице, на два многополюсника, соединенных последовательно через идеальные трансформаторы, с тем, чтобы токи на зажимах $k - k'$ были равны (см. рис. 1).

Б. Согласно теоремам II и III, производим физическое осуществление матриц $\|z_{ik}^{(1)}(p)\|$ и $\|z_{ik}^{(2)}(p)\|$, обладающих свойством равенства нулю определителя действительных частей.

Осуществление матриц $\|z_{ik}^{(1)}(p)\|$ и $\|z_{ik}^{(2)}(p)\|$ производим в следующем порядке.

1. Согласно теореме II, $|z_{ik}^{(1)}(p)|$ и $|z_{ik}^{(2)}(p)|$ равны нулю при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. Соответственно, определители обратных матриц будут иметь при $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ полюсы.

2. Переходя к обратным матрицам $\|y_{ik}^{(1)}(p)\|$ и $\|y_{ik}^{(2)}(p)\|$, отщепляя полюсы в нуле и бесконечности, представим каждую из матриц $\|y_{ik}^{(1)}(p)\|$ и $\|y_{ik}^{(2)}(p)\|$ как сумму трех матриц $(\overline{K}^{(0)}(p) + \overline{K}^{(\infty)}p^{-1} + \|y_{ik}'(p)\|)$, двух, соответствующих реактивным схемам, и некоторой остаточной матрицы, которая, согласно теореме III, также обладает тем свойством, что определитель действительных частей ее элементов равен нулю. Эта остаточная матрица при переходе к обратной матрице снова может быть разложена на сумму трех матриц и т. д.

3. Процесс продолжается до тех пор, пока все элементы остаточной матрицы не будут положительными постоянными. Подобная матрица всегда может быть физически осуществлена при помощи омических двухполюсников и идеальных трансформаторов.

Точно так же могут быть физически осуществлены в виде чисто реактивных многополюсников матрицы, получаемые при отщеплении полюсов определителя в нуле и на бесконечности ([5], [6]).

Таким образом, доказано, что условие определенной положительности $\bar{z}$ (или $\bar{y}$) матрицы является не только необходимым, но и достаточным условием физической осуществимости матрицы в виде пассивного многополюсника, что и требовалось доказать. При этом мы предполагаем, что $\bar{z}$-матрица не вырождена.

Если при разложении исходной матрицы на сумму двух матриц матрица $\| z_{ik}^{(1)}(p) \|$ или $\| z_{ik}^{(2)}(p) \|$ окажется вырождающейся, исходная положительная матрица также может быть осуществлена в виде схемы, состоящей из чисто пассивных элементов.

Действительно, пусть исходная матрица $\| z_{ik}^{(1)}(p) \|$ или $\| z_{ik}^{(2)}(p) \|$ имеет n строк и столбцов и ранг r. Тогда $(n-r)$ строк и столбцов должны быть линейной комбинацией остальных r строк и столбцов. Таким образом, с помощью линейных преобразований вырожденная матрица r-го ранга, имеющая n строк и столбцов (где $n > r$), может быть преобразована к виду, когда в $(n-r)$ строках и столбцах стоят нули. Каждое из линейных преобразований, совершаемых при подобном преобразовании, может быть ([5], [6]) осуществлено с помощью включения идеальных трансформаторов. Матрица r-го ранга, полученная в результате преобразований, будет иметь определитель действительных частей, равный нулю, и, следовательно, может быть в соответствии с предыдущим физически осуществлена.

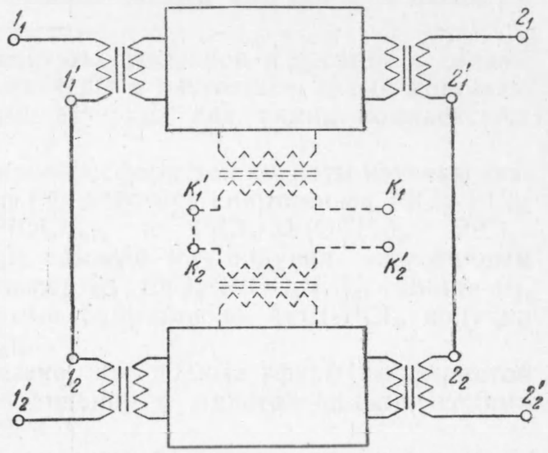

Рис. 1

Таким образом, доказана полностью следующая теорема.

Теорема. *Всякая положительная действительная матрица $2m$-го ранга, где m — конечное целое число, может быть физически осуществлена в виде пассивного многополюсника.*

Т. е. условия положительности матрицы полного сопротивления (проводимости) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для физического осуществления многополюсника.

Поступило
24 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Тафт, Изв. АН СССР, ОТН, № 3 (1949). [2] В. А. Тафт, там же, № 2 (1950). [3] R. L. Dietzold, El. Eng., No. 12 (1948). [4] М. Бохер, Введение в высшую алгебру, 1933. [5] W. Cauer, E.N.F., 9 (1932). [6] А. Ф. Белецкий, Тр. Всесоюзн. электротехн. акад. связи, № 9 (1946). [7] В. А. Тафт, Изв. АН СССР, ОТН, № 9 (1950).