Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 2

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О НОРМАЛЬНО ВОЗРАСТАЮЩИХ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЯХ И МАЙОРАНТАХ КОНЕЧНОГО РОСТА

1. В заметке (1) (теорема 1) я показал, что, какова бы ни была данная функция $\Phi(x) > c > 0$, при условии

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty, \quad \text{где } \lambda_n = \min_{-\infty<x<\infty} \frac{\sqrt[n]{\Phi(x)}}{x}, \tag{1}$$

всегда можно построить такую функцию выше нулевого рода $F_1(x)$, что

$$F_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^{2k} < \Phi(x) \quad (a_0 > 0,\ a_k \geqslant 0), \tag{2}$$

так что *условие* (1), *в силу моей известной старой теоремы* (2, 3), *является достаточным для того, чтобы* $\Phi(x)$ *была весовой функцией* ($\Phi(x) \in W$).

С другой стороны, в той же заметке (1) установлено, что *если четная функция* $\Phi(x)$ *нормально возрастает* ($\Phi(x) \in N$), *то условие* (1) *равнозначно условию*

$$\int_1^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{x^2} dx = \infty. \tag{3}$$

Таким образом, условие (3) также достаточно для построения целой функции $F_1(x)$, удовлетворяющей (2) (выше нулевого рода).

Кроме того, в заметке (4) показано (теорема 4), что при отсутствии (1) (т. е. при нарушении (3)), иначе говоря, *при условии, что*

$$\int_1^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{x^2} dx < \infty, \tag{4}$$

функция $\Phi(x) \in N$ не может быть весовой, т. е. *не может удовлетворять* (2).

Итак, теорема 1 заметки (1) вместе с теоремой 4 заметки (4) означает, что *в случае четных функций* $\Phi(x) \in N$ *существование неравенства вида* (2) *необходимо и достаточно для того, чтобы* $\Phi(x)$ *была весовой функцией.*

2. Принципиально интересным дополнением к этому утверждению является недавний результат В. С. Виденского (5): *если четная функция* $\Phi(x) \in N$ *не является весовой* (т. е. не удовлетворяет (2)), *то всегда можно построить такую функцию*

$$F_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{2k} \quad (b_k \geqslant 0) \tag{5}$$

нулевого рода, что

$$\Phi(x) < F_0(x). \tag{6}$$

Таким образом, *все четные функции* $\Phi(x) \in N$ *распадаются на два класса*: 1) $\Phi(x) \in N_1$, *удовлетворяющие неравенству вида* (2) (эквивалентному условию (3)), *которые являются весовыми функциями* ($\Phi(x) \in W$), *и* 2) $\Phi(x) \in N_0$, *удовлетворяющие неравенству вида* (6) (т. е. условию (4)), *являющиеся майорантами конечного роста нулевого рода* (согласно терминологии, введенной мною в заметке [6]), в силу одной из моих старых теорем [7] 1923 г.

Очевидно, что разделение функций $\Phi(x) \in N$ на указанные два класса распространяется также и на несимметрические функции, лишь бы только правая и левая ветви $\Phi(x)$ принадлежали к тому же самому классу (т. е. обе удовлетворяли либо условию (3), либо условию (4)).

Как мы видим, все функции $\Phi(x) \in N$, удовлетворяющие (4), т. е. $\Phi(x) \in N_0$, мажорируются $(-\infty < x < \infty)$ четными майорантами нулевого рода $F_0(x) \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$, а в силу аддитивности четных майорант нулевого рода [8] тем же свойством обладают также все целые алгебраические комбинации функций $\Phi(x) \in N_0$ и их производных. Последняя часть этого утверждения вытекает из следующей леммы:

Если $f(x) \in \mathfrak{M}$ *есть майоранта конечного роста, причем* $xf'(x) \geqslant 0$, *то* $|f'(x)|$ *также является майорантой.*

Действительно, пусть на всей оси

$$|G_p(x)| < |f'(x)|, \tag{7}$$

где $G_p(x)$ — целая функция степени p; в таком случае

$$\left| \int_0^x G_p(x)\,dx \right| < f(x); \tag{8}$$

поэтому производные всех порядков $G_p^{(k-1)}(x) = \dfrac{d^k}{dx^k} \displaystyle\int_0^x G_p(x)\,dx$ должны быть соответствующим образом ограничены вследствие того, что $f(x)$ является майорантой.

То обстоятельство, что функции, имеющие четную майоранту $\Phi_0(x) \in N_0$, принадлежат классу функций с майорантой нулевого рода $F_0(x) \in \mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$, позволяет при помощи соответствующего неравенства (6) вывести немедленно для всякой целой функции $G_p(x)$ степени $p \geqslant 0$, удовлетворяющей данному неравенству

$$|G_p(x)| \leqslant \Phi_0(x) \quad (\Phi_0(x) \in N_0;\ -\infty < x < \infty), \tag{9}$$

верхние границы [3] для $|G_p^{(k)}(x)|$ при любых данных $k > 0$ и x, а также утверждать, что к функциям $G_p(x)$ применима лемма (замкнутости) заметки [9] (из этой леммы следует, между прочим, что если функция $\Phi_0(x)$ конкретно задана, то всегда среди функций $G_p(x)$ не выше данной степени $p_0 \geqslant 0$ существует функция $G_p(x, x_0, k)$, которой производная данного порядка k достигает в данной точке x_0 наибольшего значения*).

---

* Как известно, для случая, когда $\Phi_0(x) \in \mathfrak{M}$ есть модуль целой функции конечной степени, эта задача давно решена (независимо от ее четности и принадлежности классу N_0). В заметке [10] М. М. Джрбашян рассмотрел непосредственно случай $\Phi_0(x) \in N_0$ и установил существование верхней грани для первой производной $|G_p'(x)|$ при $x = x_0$ $(-\infty < x < \infty)$, если $G_p(x)$ — многочлен любой степени.

3. В заключение я хочу остановиться на случае таких несимметричных функций $\Phi(x) \in N$, что в одном направлении $\Phi(x) \in N_0$, а в другом $\Phi(x) \in N_1$; класс таких функций мы будем обозначать через N^* и будем предполагать для определенности, что $\Phi^*(x) \in N_0^*$ при $x > 0$ и $\Phi^*(x) \in N_1^*$ при $x < 0$ (т. е. при $x > 0$ имеет место (4), а при $x < 0$ имеем (3)).

Я отметил в заметке ([4]) (сноска стр. 774), что при этом $\Phi^*(x) \in N^*$ *может быть весовой функцией* ($\Phi^*(x) \in W$); а именно, *если положить* $\Phi^*(x) = \infty$ *для всех* $x < 0$, *то для этого необходимо и достаточно, чтобы*

$$2\int_1^\infty \frac{\log \Phi^*(x^2)\,dx}{x^2} = \int_1^\infty \frac{\log \Phi^*(x)}{x^{3/2}}\,dx = \infty, \tag{10}$$

т. е. чтобы $\Phi^*(x^2) \in N_1$.

Рассмотрим теперь противоположное предположение, т. е. допустим, что имеет место сходимость интеграла

$$\int_1^\infty \frac{\log \Phi^*(x^2)\,dx}{x^2} < \infty, \tag{11}$$

равнозначная (вследствие (6)) неравенству вида

$$\Phi^*(x) < c\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{x}{\beta_n^2}\right) \quad \left(c>0,\ \beta_n>0,\ \sum_1^\infty\frac{1}{\beta_n}<\infty\right) \tag{12}$$

при $0 \leqslant x < \infty$. В таком случае справедлива

Теорема 1. *Если целая функция*

$$H_p(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{a_k x^k}{(2k)!} \qquad \left(\overline{\lim_{k=\infty}}\sqrt[2k]{|a_k|} = p\right)$$

(т. е. полустепени ([11]) $p \geqslant 0$) *удовлетворяет неравенству*

$$|H_p(x)| \leqslant \Phi^*(x) \quad (-\infty < x < \infty), \tag{13}$$

где $\Phi^*(x)$ *удовлетворяет условию* (12) *при* $x \geqslant 0$, *то, какова бы ни была* $\Phi^*(x)$ *при* $x < 0$, *имеем**

$$|H_p(x)| < 2ce^{p\sqrt{|x|}}\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{|x|}{\beta_n^2}\right) \quad (-\infty < x < \infty). \tag{14}$$

В самом деле, неравенство (13) означает, что

$$|G_p(x)| \leqslant \Phi^*(x^2) < c\prod_{n=1}^\infty\left(1+\frac{x^2}{\beta_n^2}\right) = c\prod_{n=1}^\infty\left|1+\frac{x}{i\beta_n}\right|^2,$$

где $G_p(x) = H_p(x^2)$ — целая функция конечной степени p. Поэтому, применяя известные неравенства ([12]), находим, что

$$|H_p(-y^2)| = |G_p(iy)| < c\prod_{n=1}^\infty\left|1+\frac{y}{\beta_n}\right|^2 e^{py} \quad (y>0).$$

* Т. е. даже если $\Phi^*(x) = \infty$ при $x < 0$, так что фактически неравенство (13) не налагало бы непосредственно никаких ограничений на $H_p(x)$ при $x < 0$.

Следовательно, при всех действительных x имеем

$$|H_p(-|x|)| < c\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{\sqrt{|x|}}{\beta_n}\right)^2 e^{p\sqrt{|x|}} \leqslant 2ce^{p\sqrt{|x|}}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{|x|}{\beta_n^2}\right).$$

Из полученного таким образом неравенства (14) видно, что для функции конечной полустепени $H_p(x)$ функция $\Phi^*(x)$ является майорантой конечного роста (нулевого рода).

Однако очевидно, что если вместо функции конечной полустепени $H_p(x)$ (которая всегда нулевого рода, а следовательно и нулевой степени) взять в неравенстве (13) функцию степени >0 (или, вообще, бесконечно увеличивать полустепень p), то правая часть неравенства (14) обратится в бесконечность при всяком $x<0$. Кроме того, из известного ([8]) необходимого условия, чтобы функция $|G_q(x)|$, где $G_q(x)$ — целая функция конечной степени $q \geqslant 0$, была майорантой, следует, что *если* $|G_q(x)| > c > 0$ *при* $x>0$, *то* $|G_q(x)|$ *не может быть майорантой при условии*

$$\int_{-\infty}^{-1}\frac{\log|G_q(x)|}{x^2}\,dx = \infty. \tag{15}$$

Таким образом, в частности, *если* $\Phi^*(x) = |G_q(x)| \in N_1^*$ *при* $x<0$ (*т. е. соблюдается* (15)), *а при* $x>0$ *соблюдается* (11), *то функция* $\Phi^*(x)$, *обладая всеми свойствами майоранты для функций* $H_p(x)$ *конечной полустепени* p, *не является, однако, майорантой для всех прочих функций любой конечной степени* $q_0>0$.

Такого рода сильно несимметричные функции $\Phi^*(x)$, которые, не будучи майорантами, играют роль майорант для тех функций (а именно, для всех функций конечной полустепени, в частности, для многочленов), для которых они служат майорантами даже только на одной соответствующей полуоси, я предлагаю называть полумайорантами.

В качестве примера полумайоранты укажем функцию

$$\Phi^*(x) = e^{-x} + e^{|x|^\alpha},\quad \text{где } \alpha < 1/2.$$

Ввиду того, что, как показано выше, для многочленов полумайоранты обладают на всей оси свойствами майоранты, справедливо

Следствие. *Полумайоранта не может быть весовой функцией (и наоборот).*

Однако вследствие теоремы 4 моей заметки ([13]), *если приближать произвольную непрерывную функцию* $f(x) = o\Phi^*(x)$ *целыми функциями* $G_{q_0}(x)$ *произвольно малой фиксированной степени* $q_0>0$, *то при любом данном* $\varepsilon>0$ *можно осуществить неравенство*

$$|f(x) - G_{q_0}(x)| < \varepsilon\Phi^*(x)\quad(-\infty < x < \infty),$$

какова бы ни была данная полумайоранта $\Phi^*(x)$.

Поступило
22 V 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, 77, 549 (1951). [2] С. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extrémales, Paris, 1926. [3] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. [4] С. Н. Бернштейн, ДАН, 77, 773 (1951). [5] В. С. Виденский, ДАН, 84, № 3 (1952). [6] С. Н. Бернштейн, ДАН, 60, 949 (1948). [7] С. Бернштейн, С. R., 176, 1782 (1923). [8] С. Н. Бернштейн, ДАН, 66, 545 (1949). [9] С. Н. Бернштейн, ДАН, 52, 565 (1946). [10] М. М. Джрбашян, ДАН, 84, № 1 (1952). [11] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 13, 111 (1949). [12] Н. И. Ахиезер, там же, 10, 411 (1946). [13] С. Н. Бернштейн, ДАН, 65, 117 (1949).