Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXV, № 2

МАТЕМАТИКА

М. В. АУССЕМ

# ГЕОМЕТРИЯ ДВОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 V 1952)*

1. Настоящая работа является применением инвариантного метода Г. Ф. Лаптева ([1]) и А. М. Васильева ([2]) к построению обобщенных пространств. Целью работы является построение геометрии интеграла *

$$\iint F(x, y, z, p, q)\,[dx, dy], \tag{1}$$

распространенного по поверхности $z = f(x, y)$, где $p, q$ — частные производные $f(x, y)$ по $x$ и $y$.

2. Так же, как в случае римановой и финслеровой геометрии, будем требовать инвариантность геометрии относительно бесконечной группы точечных преобразований, или, вернее, некоторого продолжения ее в смысле Ли, структура которых по Картану ([5]) будет

$$D\omega^I = \left[\omega^K \omega^I_K\right] ** \tag{2}$$

$$\begin{gathered} D\omega^I_K = \left[\omega^J_K \omega^I_J\right] + \left[\omega^I_{KL}\omega^L\right], \\ D\omega^I_{KL} = \left[\omega^J_{KL}\omega^I_J\right] - \left[\omega^I_{JL}\omega^J_K\right] - \left[\omega^I_{KJ}\omega^J_L\right] + \left[\omega^I_{KLJ}\omega^J\right], \end{gathered} \tag{3}$$

где $\omega^I$ в данном случае — любые линейные комбинации $dx^I$. Ввиду того, что строящаяся геометрия инвариантно связана с интегралом, последний всегда можно представить в виде

$$\iint [\omega^1\omega^2]. \tag{1'}$$

Так как он зависит от точки и касательной плоскости поверхности, то образующим элементом будет плоский элемент — точка и проходящая через нее плоскость, и, следовательно, в этом пространстве будет действовать двумерное продолжение основного представления группы (2), инвариантными формами которого будут $\omega^I$, $\omega^3_i$ и определяющие уравнения — первого порядка.

---

* Ср. ([3]), а также литературу, цитированную в ([4]).

** Здесь и далее прописные индексы будут пробегать значения 1, 2, 3, а строчные 1, 2.

Условие инвариантности интеграла (1′), в силу (2), примет вид

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0 \quad (\operatorname{mod} \omega^I,\ \omega_i^3).$$

Формы $\omega^I$, $\omega_i^3$, $\omega_1^1 + \omega_2^2$, приравненные нулю, образуют вполне интегрируемую систему, и, следовательно, интегралы ее образуют пространство некоторого представления группы (2).

3. Задание какого-нибудь определенного интеграла приводит в этом шестимерном пространстве к заданию гиперповерхности

$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = a_I\omega^I + b^i\omega_i^3. \tag{4}$$

Два раза последовательно продифференцируем внешним образом и раскроем по лемме Картана это уравнение:

$$\begin{aligned} &da_I - a_K\omega_I^K + b^j\omega_{jI}^3 - \omega_{kI}^k = c_{IJ}\omega^J + f_I^j\omega_j^3, \\ &db^i + b^k\omega_k^i - b^i\omega_3^3 + \omega_3^i = f_J^i\omega^J + g^{ij}\omega_j^3, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} dc_{IJ} - c_{IK}\omega_J^K - c_{KJ}\omega_I^K + f_J^k\omega_{kI}^3 + f_I^k\omega_{kJ}^3 + a_K\omega_{IJ}^K - b^k\omega_{kIJ}^3 + \omega_{kIJ}^k = \\ = k_{IJL}\omega^L + l_{IJ}^k\omega_k^3, \\ df_I^j + f_I^k\omega_k^j - f_K^j\omega_I^K - f_I^j\omega_3^3 + g^{kj}\omega_{ki}^3 - b^k\omega_{kI}^j - \omega_{3I}^j + b^j\omega_{3I}^3 = l_{IL}^j\omega^L + m_I^{jk}\omega_k^3, \\ dg^{ij} + g^{ik}\omega_k^j + g^{kj}\omega_k^i - 2g^{ij}\omega_3^3 + b^j\omega_3^i + b^i\omega_3^j = m_L^{ij}\omega^L + n^{ijk}\omega_k^3. \end{aligned} \tag{6}$$

Согласно общей теории, левые части этих уравнений, приравненные нулю, на каждом этапе продолжения образуют вполне интегрируемую систему, и, следовательно, интегралы ее определяют представление стационарной подгруппы, охватывающее исходное.

Так как геометрическим объектом является точка любого пространства представления группы, то мы таким образом получим фундаментальную последовательность объектов. Эта последовательность целиком определяется инвариантным уравнением (4) и, следовательно, является инвариантно связанной с нашим интегралом. Любой геометрический объект, инвариантно связанный с интегралом, является функцией от объектов фундаментальной последовательности.

4. На первом продолжении наиболее простым объектом, как показывают формулы (5), является $b^i$ — он определяет инвариантное направление; на втором продолжении получаем тензор $\bar{g}^{ij} = g^{ij} - b^i b^j$. Нетрудно получить их геометрический смысл. Поверхность в этом пространстве будет задаваться уравнениями

$$\omega^3 = 0, \quad \omega_i^3 = a_{ij}\omega^j, \quad a_{ij} = a_{ji}. \tag{7}$$

Свяжем с каждым плоским элементом аффинный репер, инфинитезимальное перемещение которого определяется формулами

$$d\mathbf{M} = \omega^I\mathbf{e}_I, \quad d\mathbf{e}_I = \omega_I^K\mathbf{e}_K. \tag{8}$$

Тогда вариация $\delta\iint[\omega^1\omega^2]$ интеграла (1′) в направлении $x^i\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_3$ будет равна

$$\oint [(b^1 - x^1)\,\omega^2 - (b^2 - x^2)\,\omega^1,\ \omega^3] + \iint \bar{g}^{ij}a_{ij}\,[\omega^1\omega^2\omega^3],$$

и, следовательно, равняется нулю при $x^i = b^i$ и $\overline{g}^{ij} a_{ij} = 0$, т. е. $b^i$ определяют трансверсаль, а условие экстремальности

$$\overline{g}^{ij} a_{ij} = 0,$$

если его сравнить с аналогичной формулой в классической геометрии, позволяет принять тензор $\overline{g}^{ij}$ за определяющий метрику в плоском элементе.

5. Уравнения (4), (5), (6) определяют связность в этом пространстве. Проще всего это доказать канонизацией. Действительно, приводя при помощи вторичных форм $\omega_{kI}^{k}$, $\omega_{3}^{i}$, $\omega_{IJ}^{3}$, $\omega_{3I}^{j}$, $\omega_{kIJ}^{k}$, $\omega_1^1 - \omega_3^3$, $\omega_2^2 - \omega_3^3$, $\omega_1^2$, $\omega_2^1$ величины $a_I$, $b^i$, $c_{IJ}$, $f_I^j$, $\overline{g}^{12}$ к нулю, а $\overline{g}^{11}$ и $\overline{g}^{22}$ к единице, получим

$$\begin{gathered}
\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0 \quad \omega_3^i = \omega_i^3, \\
\omega_1^1 - \omega_3^3 = \frac{1}{2}\left(m_L^{11}\omega^L + n^{11l}\omega_l^3\right), \\
\omega_1^2 + \omega_2^1 = m_L^{12}\omega^L + n^{12l}\omega_l^3, \\
\omega_2^2 - \omega_3^3 = \frac{1}{2}\left(m_L^{22}\omega^L + n^{22l}\omega_l^3\right),
\end{gathered} \tag{9}$$

которые вместе с уравнениями структуры, как обычно, определяют связность.

6. При этой канонизации, как показывает третье продолжение уравнения (4), $n^{ijk}$ образует тензор.

Обращение в нуль тензора $n^{ijk}$ свидетельствует о том, что метрика в плоском элементе не зависит от плоскости, а лишь от точки, т. е. пространства, присоединенные к соответствующим интегралам, будут средними между римановыми и более общими.

7. Наконец, заметим, что геометрия $(n-1)$-кратного интеграла в $n$-мерном пространстве получится из предыдущего, если заставить прописные индексы пробегать значения $1, 2, \ldots, n$, строчные $1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1$ и заменить индекс 3 на индекс $n$.

В заключение выражаю благодарность проф. С. П. Финикову и Г. Ф. Лаптеву за руководство работой.

Поступило
11 III 1952

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Ф. Лаптев, ДАН, **78**, № 2 (1951). [2] А. М. Васильев, ДАН, **79**, № 1 (1951). [3] E. Cartan, Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire, Paris, 1933. [4] М. В. Ауссем, ДАН, **80**, № 5 (1951). [5] E. Cartan, Ann. de l'Ec. Norm., **22** (1905).