

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Я. С. УФЛЯНД

**ПРИМЕНЕНИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА К ЗАДАЧЕ
ОБ ИЗГИБЕ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПЛИТЫ КЛИНОВИДНОЙ ФОРМЫ**

(Представлено академиком А. Ф. Иоффе 17 III 1952)

1. Клиновидная область в полярных координатах (r, θ) определяется неравенствами: $0 \leq r < \infty$; $0 \leq \theta \leq \alpha$. Прогиб плиты $w(r, \theta)$ удовлетворяет уравнению:

$$\nabla^4 w = \frac{q(r, \theta)}{D} \quad \left(D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)} \right) \quad (1)$$

и четырьмя граничными условиями (по два на каждом прямолинейном краю).

Полагая

$$\bar{w}(\theta, \nu) = \int_0^{\infty} w(r, \theta) r^{\nu-2} dr, \quad 1 - \beta < \operatorname{Re} \nu < 1 + \gamma^*, \quad (2)$$

умножая (1) на $r^{\nu+2} dr$ и интегрируя от 0 до ∞ , получаем:

$$\begin{aligned} \frac{d^4 \bar{w}}{d\theta^4} + [(\nu-1)^2 + (\nu+1)^2] \frac{d^2 \bar{w}}{d\theta^2} + (\nu-1)^2 (\nu+1)^2 \bar{w} = \\ = \frac{1}{D} \int_0^{\infty} q(r, \theta) r^{\nu+2} dr = f_{\nu}(\theta), \end{aligned} \quad (3)$$

откуда

$$\begin{aligned} \bar{w} = A(\nu) \cos(\nu-1)\theta + B(\nu) \sin(\nu-1)\theta + \\ + C(\nu) \cos(\nu+1)\theta + E(\nu) \sin(\nu+1)\theta + \Phi_{\nu}(\theta), \end{aligned}$$

$$\Phi_{\nu}(\theta) = \frac{1}{4\nu} \int_0^{\theta} f_{\nu}(t) K_{\nu}(\theta, t) dt; \quad (4)$$

здесь

$$K_{\nu}(\theta, t) = \frac{\sin(\nu-1)(\theta-t)}{\nu-1} - \frac{\sin(\nu+1)(\theta-t)}{\nu+1}. \quad (5)$$

Функции A, B, C, E должны быть определены из граничных условий, после чего решение задачи дается формулой обращения

$$w(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \bar{w}(\theta, \nu) r^{1-\nu} d\nu; \quad (6)$$

* Считаем, что при $r \rightarrow \infty$ $w \sim r^{-\gamma}$ ($\gamma > 0$), при $r \rightarrow 0$ $w \sim r^{\beta}$ ($\beta > 1$).

здесь (L) — прямая, параллельная мнимой оси комплексной плоскости (ν), не выходящая из полосы голоморфности подинтегральной функции.

Если в точке $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ приложена сосредоточенная сила P , то

$$\Phi_\nu(\theta) = \begin{cases} \frac{Pr_0^{\nu+1}}{4\nu D} K_\nu(\theta, \theta_0) & \text{при } \theta \geq \theta_0, \\ 0 & \text{при } \theta \leq \theta_0. \end{cases} \quad (7)$$

2. Рассмотрим плиту с опертymi краями ($\theta = \pm \alpha/2$), подверженную действию силы P , приложенной в точке оси симметрии ($\theta_0 = 0$).

Граничные условия таковы:

$$\bar{w} \Big|_{\theta=\pm\alpha/2} = \frac{d^2\bar{w}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\pm\alpha/2} = 0,$$

или

$$\bar{w} \Big|_{\theta=\pm\alpha/2} = \frac{d^2\bar{w}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\pm\alpha/2} = 0. \quad (8)$$

В силу симметрии $B = E = 0$;

$$A = -\frac{Pr_0^{\nu+1}}{8\nu D} \frac{\operatorname{tg}(\nu-1)\alpha/2}{\nu-1}, \quad C = \frac{Pr_0^{\nu+1}}{4\nu D} \frac{\operatorname{tg}(\nu+1)\alpha/2}{\nu+1}, \quad (9)$$

$$w(r, \theta) \Big|_{\theta>0} = \frac{Pr_0^2}{8D} \frac{r}{r_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \left[\frac{\sin(\nu+1)(\alpha/2-\theta)}{(\nu+1)\cos(\nu+1)\alpha/2} - \frac{\sin(\nu-1)(\alpha/2-\theta)}{(\nu-1)\cos(\nu-1)\alpha/2} \right] \left(\frac{r_0}{r}\right)^\nu \frac{d\nu}{\nu}. \quad (10)$$

Так как полоса голоморфности подинтегральной функции в (6) содержит мнимую ось, то, полагая $\nu = ix$, имеем:

$$w(r, \theta) = \frac{Pr_0^2}{4\pi D} \frac{r}{r_0} \int_0^\infty [\cos \theta \cdot \operatorname{sh} x(\alpha - \theta) - \cos(\alpha - \theta) \cdot \operatorname{sh} x\theta + \\ + x \sin \theta \cdot \operatorname{ch} x(\alpha - \theta) - x \sin(\alpha - \theta) \cdot \operatorname{ch} x\theta] \frac{\cos x \operatorname{lg} \frac{r}{r_0}}{\cos \alpha + \operatorname{ch} x\alpha} \frac{dx}{x(x^2+1)}. \quad (11)$$

В частности, для квадранта ($\alpha = \pi/2$) после взятия интегралов (1) получаем для прогиба на оси:

$$w(r, 0) = \frac{Pr_0^2}{4\pi D} \frac{r}{r_0} \left[\operatorname{ch} \operatorname{lg} \frac{r}{r_0} \cdot \operatorname{lg} \frac{1 - \left(\frac{r_0}{r}\right)^2}{1 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2} + \operatorname{lg} \frac{1 + \frac{r_0}{r}}{1 - \frac{r_0}{r}} \right]. \quad (12)$$

Прогиб под силой будет

$$w(r_0, 0) = \frac{Pr_0^2}{4\pi D} \operatorname{lg} 2. \quad (13)$$

3. Если один край плиты закреплен, а другой оперт, то имеем граничные условия:

$$\bar{w} \Big|_{\theta=0} = \frac{d\bar{w}}{d\theta} \Big|_{\theta=0} = \bar{w} \Big|_{\theta=\alpha} = \frac{d^2\bar{w}}{d\theta^2} \Big|_{\theta=\alpha} = 0. \quad (14)$$

Для изгибающего момента на закрепленном краю ($\theta = 0$) получаем:

$$\frac{M(r)}{P} = \frac{r_0}{r} \frac{1}{2\pi i} \int_{(L)} \frac{\sin(\nu+1)(\alpha-\theta_0) \cdot \sin(\nu-1)\alpha - \sin(\nu-1)(\alpha-\theta_0) \cdot \sin(\nu+1)\alpha}{\sin 2\nu\alpha - \nu \sin 2\alpha} \left(\frac{r_0}{r}\right)^\nu d\nu, \quad (15)$$

или, полагая, как ранее, $\nu = ix$,

$$\frac{M(r)}{P} = \frac{2}{\pi} \frac{r_0}{r} \int_0^\infty [\operatorname{ch} x(\alpha - \theta_0) \cdot \sin(\alpha - \theta_0) \cdot \operatorname{sh} x\alpha \cdot \cos \alpha - \operatorname{sh} x(\alpha - \theta_0) \cdot \cos(\alpha - \theta_0) \cdot \operatorname{ch} x\alpha \cdot \sin \alpha] \frac{\cos x \operatorname{lg} \frac{r_0}{r}}{\operatorname{sh} 2x\alpha - x \sin 2\alpha} dx. \quad (16)$$

Рассмотрим два частных случая:

а) $\alpha = \pi/2$ — квадрант ($\theta = 0$ — закрепленный край, $\theta = \pi/2$ — опора):

$$\frac{M(r)}{P} = \frac{2}{\pi} \frac{r_0}{r} \frac{\sin \theta_0 \cdot \sin 2\theta_0}{\left(\frac{r}{r_0}\right)^2 + \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 - 2 \cos 2\theta_0}; \quad (17)$$

б) $\alpha = \pi$ — полуплоскость ($\theta = 0$ — закрепленный край, $\theta = \pi$ — опора):

$$\frac{M(r)}{P} = \frac{1}{\pi} \frac{r_0}{r} \frac{\left(\sqrt{\frac{r}{r_0}} + \sqrt{\frac{r_0}{r}}\right) \sin \theta_0 \cdot \sin \frac{\theta_0}{2}}{\frac{r}{r_0} + \frac{r_0}{r} - 2 \cos \theta_0}. \quad (18)$$

4. Случай обоих закрепленных краев иным способом решен И. Е. Сахаровым⁽²⁾ и по существу совпадает с соответствующей плоской задачей теории упругости, рассмотренной В. М. Абрамовым, а также А. И. Лурье и Б. З. Брачковским⁽³⁾.

Ленинградский политехнический институт
им. М. И. Калинина

Поступило
10 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ D. Bierens de Haan, *Nouvelles tables d'intégrales définies*, N. — Y., 1939.
² И. Е. Сахаров, *Прикладн. матем. и мех.*, 12, в. 4 (1948). ³ А. И. Лурье и Б. З. Брачковский, *Изв. Ленинградск. политехн. ин-та*, № 3, 158 (1941).