Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 3

ГИДРОМЕХАНИКА

Г. А. АДАМОВ

ТЕЧЕНИЕ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ ПО ВЕРТИКАЛЬНЫМ ТРУБАМ

(Представлено академиком С. А. Христиановичем 24 III 1952)

В статье выводится практически точная формула для вертикального потока реальных газов при высоких давлениях, позволяющая, в частности, вычислять забойное давление в газовых скважинах.

Течение газа в вертикальных трубах характеризуется уравнениями механической энергии (1), неразрывности (2) и состояния (3):

$$v\,dv + dp/\rho + g\,dx + \lambda v^2\,dx/2D = 0^*. \qquad (1)$$

$$G = g\rho vF = \text{const}, \qquad (2)$$

$$p = z\rho gRT, \qquad (3)$$

где v — средняя скорость течения; p — абсолютное давление; ρ — плотность газа; g — ускорение силы тяжести; x — переменная координата по длине трубы; λ — коэффициент сопротивления; D — диаметр и F — площадь поперечного сечения трубы; G — весовой расход; T — абсолютная температура; R — газовая постоянная; z — коэффициент сверхсжимаемости, характеризующий отклонение реальных газов от законов совершенного газа и зависящий от давления и температуры.

В (1) из величин v, p и ρ выберем в качестве зависимой переменной плотность ρ. Выразим p и v через ρ из (2) и (3): $p = gRzT\rho$, $v = G/gF\rho = 4G/g\pi D^2\rho$, причем $dp = gR[zT\,d\rho + \rho\,d(zT)]$ и $dv = -4G\,d\rho/g\pi D^2\rho^2$. Подставив в (1) эти выражения p, v и их дифференциалов и разделив переменные, получим:

$$dx = \frac{16G^2 d\rho}{\pi^2 g^3 D^4 \rho\left(\rho^2 + \dfrac{8\lambda G^2}{\pi^2 g^3 D^5}\right)} - \frac{R\rho\,[zT\,d\rho + \rho\,d(zT)]}{\rho^2 + \dfrac{8\lambda G^2}{\pi^2 g^3 D^5}}. \qquad (4)$$

Так как обычно температура изменяется по длине трубы не очень значительно, то практически допустимо считать процесс течения изотермическим: $T = T_{\text{ср}} = \text{const}$. Коэффициент λ можно принять постоянным по длине трубы. Действительно, λ зависит от числа $\text{Re} = \rho vD/\mu$ (μ — коэффициент вязкости), числа $M = v/a_*$ (a_* — скорость звука) и относительной шероховатости $\varepsilon = 2e_k/D$ (e_k — абсолютная шероховатость). В трубе постоянного сечения $D = \text{const}$, $\rho v = \text{const}$, μ же хотя и изменяется по длине трубы, но незначительно. Поэтому практически можно принимать Re постоянным по длине трубы. Также постоянной по длине трубы можно считать величину ε. Зависимостью же λ от M при обычных рабочих скоростях можно пренебрегать. Отклонение реальных углеводородных газов от совершенного при больших дав-

* При течении вверх. При течении вниз отвечающий силе тяжести член уравнения (1) $g\,dx$ и, в дальнейшем, соответствующие величины отрицательны.

лениях очень существенно, причем коэффициент z сильно изменяется с давлением. Принятие $z = z_{\text{ср}}$ (и, тем более, $z = 1$) приводит к ошибкам.

Дадим решение (4) для изотермического течения с учетом изменения z по длине трубы. Для давлений до $100 \div 120$ ата зависимость z от p практически может быть выражена соотношением

$$z = 1 / (1 + kp), \tag{5}$$

где k — постоянная, зависящая от состава и температуры газа. Для метана при $278° \leqslant T \leqslant 323°$ и p в кг / м² имеем $k \cong (98 - 0{,}27T) \cdot 10^{-8}$ м²/кг. При содержании в газе c_1% метана, c_2% этана, c_3% углекислоты и c_4% воздуха $k \cong k' \cdot 10^{-10} (c_1 + 4c_2 + 3c_3 + 0{,}22c_4)$ м² / кг; при небольших температурах $k' \cong 22$. Можно определить $k' = k'(T)$ и уточнить k.

Заменив в (5) p через ρ, получим, $z = 1 / (1 + kzgRT\rho)$.

Поправку z к величине $kgRT\rho$ в знаменателе этого выражения можно заменить ее средним значением $z_{\text{ср}} = \text{const}$. При этом:

$$z = 1 / (1 + kz_{\text{ср}} gRT\rho), \tag{6}$$

$$dz = -kz_{\text{ср}} gRT\, d\rho / (1 + kz_{\text{ср}} gRT\rho)^2. \tag{7}$$

Подставляя (6) и (7) в (4), найдем:

$$dx = \frac{16G^2 d\rho}{\pi^2 g^3 D^4 \rho \left(\dfrac{8\lambda G^2}{\pi^2 g^3 D^5} + \rho^2\right)} - \frac{RT}{k^2 z_{\text{ср}}^2 g^2 R^2 T^2} \frac{\rho\, d\rho}{\left(\dfrac{1}{kz_{\text{ср}} gRT} + \rho\right)^2 \left(\dfrac{8\lambda G^2}{\pi^2 g^3 D^5} + \rho^2\right)}, \tag{8}$$

или, обозначив $1 / kz_{\text{ср}} gRT = a$ и $8\lambda G^2 / \pi^2 g^3 D^5 = b$:

$$dx = \frac{16G^2}{\pi^2 g^3 D^4} \frac{d\rho}{\rho (b + \rho^2)} - RTa^2 \frac{\rho\, d\rho}{(a + \rho)^2 (b + \rho^2)}. \tag{9}$$

Интегрируя (9) от 0 до L (L — длина трубы) и от ρ_0 до ρ_n, найдем*:

$$L = \frac{16\, G^2}{2\pi^2 g^3 D^4 b} \ln \frac{\rho_n^2 (b + \rho_0^2)}{\rho_0^2 (b + \rho_n^2)} - \frac{RTa^2}{(a^2 + b)^2} \Bigg[a (a^2 + b) \frac{\rho_0 - \rho_n}{(a + \rho_0)(a + \rho_n)} + \\ + (a^2 - b) \ln \frac{a + \rho_0}{a + \rho_n} - \frac{1}{2} (a^2 - b) \ln \frac{b + \rho_0^2}{b + \rho_n^2} - \frac{2ab}{\sqrt{b}} \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{b} (\rho_0 - \rho_n)}{b + \rho_0 \rho_n} \Bigg]. \tag{10}$$

Подставив в (10) выражения a и b, заменив ρ через p и произведя ряд преобразований, получим формулу для изотермического течения реального газа в вертикальной трубе, учитывающую изменение кинетической энергии и коэффициента сверхсжимаемости по длине трубы:

$$\frac{[p_0^2 (1 + kp_0)^2 + \alpha]^{1+\omega}}{[1 + z_{\text{ср}} kp_0 (1 + kp_0)]^2 [p_0 (1 + kp_0)]^{2\omega}} = \frac{[p_n^2 (1 + kp_n)^2 + \alpha]^{1+\omega}}{[1 + z_{\text{ср}} kp_n (1 + kp_n)]^2 [p_n (1 + kp_n)]^{2\omega}} e^{\beta}, \tag{11}$$

или

$$p_0^2 = \left[\frac{[1 + z_{\text{ср}} kp_0 (1 + kp_0)]\, p_0^{\omega}}{1 + kp_0} \right]^{2/(1+\omega)} \Bigg\{ p_n^2 e^{\beta/(1+\omega)} \left[\frac{1 + kp_n}{[1 + z_{\text{ср}} kp_n (1 + kp_n)]\, p_n^{\omega}} \right]^{2/(1+\omega)} + \\ + \alpha \Bigg[\frac{e^{\beta/(1+\omega)}}{([1 + z_{\text{ср}} kp_n (1 + kp_n)]\, [p_n (1 + kp_n)]^{\omega})^{2/(1+\omega)}} - \\ - \frac{1}{([1 + z_{\text{ср}} kp_0 (1 + kp_0)]\, [p_0 (1 + kp_0)]^{\omega})^{2/(1+\omega)}} \Bigg] \Bigg\}, \tag{12}$$

* В случае течения газа в скважине индекс 0 соответствует забою, а индекс n — устью скважины.

где

$$\alpha = 8\lambda R^2 T^2 G^2 / \pi^2 g D^5 = 8 R_{\text{в}}^2 \gamma_{\text{в}}^2 \lambda T^2 Q_{\text{н}}^2 / \pi^2 g D^5, \tag{13}$$

$$\beta = \frac{2L}{RT}\frac{(1+z_{\text{ср}}^2 k^2\alpha)^2}{1-z_{\text{ср}}^2 k^2\alpha} + 2\frac{1+z_{\text{ср}}^2 k^2\alpha}{1-z_{\text{ср}}^2 k^2\alpha}\frac{z_{\text{ср}} k\,[p_0(1+kp_0)-p_n(1+kp_n)]}{[1+z_{\text{ср}} kp_0(1+kp_0)]\,[1+z_{\text{ср}} kp_n(1+kp_n)]} -$$

$$- \frac{4 z_{\text{ср}} k \alpha^{0,5}}{1-z_{\text{ср}}^2 k^2 \alpha} \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha^{0,5}[p_0(1+kp_0)-p_n(1+kp_n)]}{\alpha + p_0 p_n (1+kp_0)(1+kp_n)}, \tag{14}$$

$$\omega = \frac{2D}{RT\lambda}\frac{(1+z_{\text{ср}}^2 k^2\alpha)^2}{1-z_{\text{ср}}^2 k^2\alpha}, \tag{15}$$

$R_{\text{в}} = R\bar{\gamma}$ — газовая постоянная сухого воздуха; $\gamma_{\text{в}}$ и $\bar{\gamma}$ — удельный вес сухого воздуха и относительный удельный вес газа по воздуху при нормальных условиях; $Q_{\text{н}}$ — объемный расход при нормальных условиях.

В обычных на практике условиях, когда силы трения и веса намного превосходят инерционные и, соответственно, падение давления во много раз больше изменения кинетической энергии, можно последним пренебрегать (т. е. не учитывать инерционные силы). При этом надо положить $\omega \cong 0$*, и тогда из (12) следует:

$$p_0^2 = \left[\frac{1+z_{\text{ср}} kp_0(1+kp_0)}{1+kp_0}\right]^2 \left\{ p_n^2 e^{\beta} \left[\frac{1+kp_n}{1+z_{\text{ср}} kp_n(1+kp_n)}\right]^2 + \right.$$

$$\left. + \alpha\left[\frac{e^{\beta}}{[1+z_{\text{ср}} kp_n(1+kp_n)]^2} - \frac{1}{[1+z_{\text{ср}} kp_0(1+kp_0)]^2}\right]\right\}. \tag{16}$$

При $k=0$, чему соответствует $z=1$, из (11), (12) и (16) получаются формулы для течения совершенного газа, а если в последние ввести поправку $z_{\text{ср}}$ к величине RT, то приближенные формулы для течения реальных газов при допущении $z = z_{\text{ср}} = \text{const}$: с учетом изменения кинетической энергии по длине, т. е. с учетом инерционных сил,

$$\frac{p_0^2 + z_{\text{ср}}^2\alpha}{p_0^{4D/(z_{\text{ср}} RT\lambda + 2D)}} = \frac{p_n^2 + z_{\text{ср}}^2\alpha}{p_n^{4D/(z_{\text{ср}} RT\lambda+2D)}} e^{2L\lambda/(z_{\text{ср}} RT\lambda + 2D)}, \tag{17}$$

$$p_0^2 = \left(\frac{p_0}{p_n}\right)^{4D/(z_{\text{ср}} RT\lambda+2D)} p_n^2 e^{2L\lambda/(z_{\text{ср}} RT\lambda+2D)} +$$

$$+ z_{\text{ср}}^2\alpha\left[\left(\frac{p_0}{p_n}\right)^{4D/(z_{\text{ср}} RT\lambda+2D)} e^{2L\lambda/(z_{\text{ср}} RT\lambda+2D)} - 1\right] \tag{18}$$

и при пренебрежении изменением кинетической энергии по длине **

$$p_0^2 = p_n^2 e^{2L/z_{\text{ср}} RT} + z_{\text{ср}}^2 \alpha\,(e^{2L/z_{\text{ср}} RT} - 1). \tag{19}$$

Интегрируя уравнение (4) при условии $z = z_{\text{ср}} = \text{const}$, получим непосредственно (17), (18) и, после упрощения, (19)***.

---

* Для газовых скважин обычно ω — малая величина, меньшая 0,004 (отношение $2D/RT\lambda$ практически имеет значения от 0,0002 до 0,003).

** Причем приближенно $2D / z_{\text{ср}} RT\lambda = 4D / (z_{\text{ср}} RT\lambda + 2D) = 0$.

*** В общем случае течения в трубе, расположенной под любым углом Θ к горизонтальной плоскости, дифференциальное уравнение механической энергии будет: $v\,dv + dp/\rho + g\sin\Theta\,dx + \lambda v^2 dx / 2D = 0$. Отсюда аналогичным путем получается

Решение (12) и (16) получается методом последовательных приближений. Сначала p_0 определяется по (19), а затем по (12) или (16), путем последовательных подстановок найденных значений p_0 в корректирующие множители. Практически обычно достаточно двух операций, включая определение p_0 по (19). Формулы (12) и (16) следует применять, когда необходимо точное определение давления p_0. Если особой точности не требуется, то можно пользоваться соответственно (18) или в обычных практических условиях (19).

Упрощать (12) и (16) в общем нецелесообразно, так как при этом их точность уменьшается, для приближенных же вычислений удобнее применять (19). Только при не очень больших потерях давления можно в них одновременно положить $z_{\text{ср}} = 1$ и пренебречь вторыми степенями малых величин типа k^2p^2. При этом они дают:

$$p_0^{2/(1+\omega_1)} = p_n^{2/(1+\omega_1)} e^{\beta_1/(1+\omega_1)} + \alpha\left[\frac{e^{\beta_1/(1+\omega_1)}}{(1+kp_n)^2\, p_n^{2\omega_1/(1+\omega_1)}} - \frac{1}{(1+kp_0)^2\, p_0^{2\omega_1/(1+\omega_1)}}\right], \quad (20)$$

$$p_0^2 = p_n^2 e^{\beta_1} + \alpha\left[\frac{e^{\beta_1}}{(1+kp_n)^2} - \frac{1}{(1+kp_0)^2}\right], \quad (21)$$

где

$$\beta_1 = \frac{2L}{RT}\,\frac{(1+k^2\alpha)^2}{1-k^2\alpha} + 2k\,(p_0 - p_n)\,\frac{1+k^2\alpha}{1-k^2\alpha} - \frac{4k\alpha^{0,5}}{1-k^2\alpha}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{\alpha^{0,5}\,(p_0-p_n)\,[1+k\,(p_0+p_n)]}{\alpha + p_0p_n\,[1+k\,(p_0+p_n)]};$$

$$\omega_1 = \frac{2D}{RT\lambda}\,\frac{(1+k^2\alpha)^2}{1-k^2\alpha}.$$

Выражение (5) для z и, следовательно, (12), (16), (20) и (21) справедливы в интервале давлений от 0 до $100 \div 120$ ата. Аналогично можно получить формулы для давлений от 180 до 300 ата. В интервале $120 \div 180$ ата можно принимать $z = z_{\text{ср}}$*.

Всесоюзный научно-исследовательский институт природных газов

Поступило 9 III 1951

уравнение для наклонного изотермического течения с учетом изменения z по длине. При $z = z_{\text{ср}} = \text{const}$ для наклонного течения получаются приближенные уравнения:

$$p_0^2 = \left(\frac{p_0}{p_n}\right)^{4D\sin\Theta/(z_{\text{ср}}RT\lambda+2D\sin\Theta)} p_n^2\, e^{2L\lambda\sin\Theta/(z_{\text{ср}}RT\lambda+2D\sin\Theta)} + \frac{z_{\text{ср}}^2\alpha}{\sin\Theta}\left[\left(\frac{p_0}{p_n}\right)^{4D\sin\Theta/(z_{\text{ср}}RT\lambda+2D\sin\Theta)} e^{2L\lambda\sin\Theta/(z_{\text{ср}}RT\lambda+2D\sin\Theta)} - 1\right],$$

и, когда можно пренебречь инерционными силами,

$$p_0^2 = p_n^2 e^{2L\sin\Theta/z_{\text{ср}}RT} + \frac{z_{\text{ср}}^2\alpha}{\sin\Theta}\left(e^{2L\sin\Theta/z_{\text{ср}}RT} - 1\right).$$

Из этих уравнений при $\sin\Theta = 1$ вытекают (18) и (19) для вертикального потока. При $\sin\Theta = 0$ (неопределенность, получающаяся во втором члене при непосредственной подстановке значения $\sin\Theta = 0$, легко устраняется путем предварительного разложения в ряды степенной и показательной функций и раскрытия скобок) они соответственно дают формулы для горизонтального потока:

$$G^2 = \frac{\pi^2 g D^5\,(p_0^2 - p_n^2)}{16 z_{\text{ср}} RT\lambda L\,(1 + 2D/\lambda L)} \quad \text{и} \quad G^2 = \frac{\pi^2 g D^5\,(p_0^2 - p_n^2)}{16 z_{\text{ср}} RT\lambda L}.$$

* При выборе в (1) давления p в качестве зависимой переменной и выражения z по (5) получается очень сложная формула. Здесь ее не приводим. Укажем, что приближенные формулы (18) и (19) при достаточно больших α дают завышенные значения p_0.