Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 3

МЕХАНИКА

М. Ф. ШУЛЬГИН

ТЕОРЕМА ПУАССОНА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ С МНОЖИТЕЛЯМИ СВЯЗЕЙ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 25 III 1952)

Г. К. Суслов [1] построил уравнение в частных производных и распространил метод полного интеграла Гамильтона — Якоби на случай уравнений динамики голономных консервативных систем с множителями связей. Другие теории (теорема Пуассона и др.), относящиеся к интегрированию уравнений динамики с множителями связей, не получили развития даже для голономных систем из-за трудностей, которые возникают вследствие наличия в уравнениях движения неопределенных множителей. В настоящей заметке мы показываем, что к уравнениям динамики с множителями связей для голономных консервативных систем применима классическая теорема Пуассона.

1. Пусть связи, наложенные на консервативную динамическую систему, положение которой определяется координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, заданы m конечными уравнениями вида

$$f_\alpha(q_1, q_2, \ldots, q_n) = 0 \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

или им равносильными непроинтегрированными уравнениями вида

$$\dot{q}_\mu = \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu\mu}\,\dot{q}_\nu \quad (\mu = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

где $B_{\nu\mu}$ — данные функции $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Вследствие интегрируемости уравнений (2) $B_{\nu\mu}$ тождественно удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho} - \frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_\nu} + \sum_{i=1}^{m}\left(B_{\rho i}\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_i} - B_{\nu i}\frac{\partial B_{\rho\mu}}{\partial q_i}\right) \equiv E_\rho(B_{\nu\mu}) - E_\nu(B_{\rho\mu}) = 0 \tag{3}$$

$$(\rho, \nu = m+1, \ldots, n, \quad \mu = 1, 2, \ldots, m);$$

здесь оператор $E_\rho = \dfrac{\partial}{\partial q_\rho} + \sum\limits_{i=1}^{m} B_{\rho i}\dfrac{\partial}{\partial q_i}$ введен для сокращения.

Тогда уравнения движения рассматриваемой механической системы, содержащие неопределенные множители λ, могут быть записаны в виде:

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H_0}{\partial u_j}, \quad \dot{u}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial q_i} + \lambda_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n;\ i = 1, 2, \ldots, m);$$
$$\dot{u}_\rho = -\frac{\partial H_0}{\partial q_\rho} - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i B_{\rho i} \quad (\rho = m+1, \ldots, n), \tag{4}$$

где

$$H_0(t; q_1, \ldots, q_n; u_1, \ldots, u_n) = \sum_{j=1}^{n} u_j \dot{q}_j - L_0(t; q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n), \quad u_j = \frac{\partial L_0}{\partial u_j}.$$

Уравнения (4) рассматриваются совместно с уравнениями связей (2), которые можно переписать так:

$$\frac{\partial H_0}{\partial u_i} = \sum_{\nu=m+1}^{n} B_{\nu i} \frac{\partial H_0}{\partial u_\nu} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{5}$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы Пуассона для уравнений (4), установим некоторые соотношения, которые понадобятся в дальнейшем.

2. В силу уравнений (5) n импульсов u_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ связаны между собою m условиями; следовательно, независимых u_j будет только $n - m$.

Обозначая через L результат исключения $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_m$ из выражения L_0 через посредство уравнения (2), получим

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\rho} = \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_\rho} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial L_0}{\partial \dot{q}_i} B_{\rho i}, \quad (\rho = m+1, \ldots, n)$$

или

$$p_\rho = u_\rho + \sum_{i=1}^{m} B_{\rho i} u_i \quad (\rho = m+1, \ldots, n), \tag{6}$$

где через $p_\rho = \partial L / \partial \dot{q}_\rho$ обозначены независимые между собою импульсы.

Далее, рассматривая H_0 как результат исключения импульсов p_ρ $(\rho = m+1, \ldots, n)$ из функции $H(t; q_1, \ldots, q_n; p_{m+1}, \ldots, p_n) = \sum_{\rho=m+1}^{n} p_\rho \dot{q}_\rho - L(t; q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_{m+1}, \ldots, \dot{q}_n)$ через посредство уравнений (6), получим

$$\frac{\partial H_0}{\partial u_\rho} = \frac{\partial H}{\partial p_\rho}, \quad \frac{\partial H_0}{\partial u_i} = \sum_{\rho=m+1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_\rho} B_{\rho i} \quad (\rho = m+1, \ldots, n; \ i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7}$$

Отсюда ясно, что соотношения (5), которые могут быть получены и из (7), представляют собою тождества.

Пусть φ есть произвольная функция от $t, q_1, q_2, \ldots, q_n, p_{m+1}, \ldots, p_n$, причем переменные $q_1, q_2, \ldots, q_n$ связаны уравнениями (2).

Обозначая через φ_0 результат исключения $p_{m+1}, p_{m+2}, \ldots, p_n$ из выражения φ через посредство уравнений (6), аналогично предыдущему получим

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial p_\rho}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_i} = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_\rho} \quad (\rho = m+1, \ldots, n; \ i = 1, 2, \ldots, m);$$

отсюда

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial u_i} = \sum_{\rho=m+1}^{n} B_{\rho i} \frac{\partial \varphi_0}{\partial u_\rho} \quad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{8}$$

Соотношения (8), существующие для любой функции $\varphi_0(t; q_j; u_j)$, которой переменные q_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ связаны уравнениями (1) или (2), позволяют доказать для уравнений движения с множителями связей (4) теорему Пуассона.

Действительно, положим, что нам известны два интеграла системы (4):

$$\varphi(t; q_j; u_j) = C_1, \quad \psi(t; q_j, u_j) = C_2 \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \tag{9}$$

(далее у φ и ψ значок нуль за ненадобностью опущен). Докажем, что соотношение

$$(\varphi, \psi) \equiv \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \right) = \text{const}$$

также служит интегралом уравнений (4).

Для доказательства этой теоремы составим производную по t выражения (φ, ψ) и убедимся, что она равна нулю; имеем

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial u_i} + \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi}{\partial q_i} - \frac{\partial \psi}{\partial q_i} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \right). \tag{10}$$

Но так как φ и ψ являются интегралами системы (4), то $\dot{\varphi}$ и $\dot{\psi}$, если принять во внимание эти уравнения, тождественно равны нулю, и тогда, имея в виду соотношения (8), мы получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial H_0}{\partial u_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right) \equiv 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial q_i} \frac{\partial H_0}{\partial u_i} - \frac{\partial \psi}{\partial u_i} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right) \equiv 0. \tag{11}$$

Дифференцируя эти два равенства по q_j и u_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, получим

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial q_j} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i\, \partial q_j} \frac{\partial H_0}{\partial u_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\, \partial q_j} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i\, \partial q_j} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\, \partial q_j} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t\, \partial u_j} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i\, \partial u_j} \frac{\partial H_0}{\partial u_i} + \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\, \partial u_j} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_i\, \partial u_j} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} - \frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\, \partial u_j} \right) = 0 \\ (j = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{12}$$

и два аналогичных уравнения для функции ψ.

Кроме того, вычисляя величины $\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j}$ и $\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j}$, принимая при этом во внимание уравнения (4) и соотношения (8), мы имеем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_j\, \partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_j\, \partial q_i} \frac{\partial H_0}{\partial u_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_j\, \partial u_i} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right) + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} \lambda_\mu,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j\, \partial t} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j\, \partial q_i} \frac{\partial H_0}{\partial u_i} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u_j\, \partial u_i} \frac{\partial H_0}{\partial q_i} \right) \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

На основании этих соотношений мы можем переписать (12) так

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\, \partial q_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\, \partial q_j} \right) + \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=m+1}^{n} \frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_j} \frac{\partial \varphi}{\partial u_\nu} \lambda_\mu, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \varphi}{\partial u_j} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_i} \frac{\partial^2 H_0}{\partial q_i\, \partial u_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial q_i} \frac{\partial^2 H_0}{\partial u_i\, \partial u_j} \right) \quad (j = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{13}$$

и два аналогичных равенства для функции ψ (которые для простоты не написаны).

Подставляя в уравнение (10) вместо $\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial u_i}$, $\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial q_i}$ и $\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi}{\partial u_i}$ найденные их значения, имеем после простых преобразований соотношение:

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u_j}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}\frac{\partial\psi}{\partial u_\nu}\right)\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_j}\lambda_\mu,$$

или, разбивая сумму по j на две суммы:

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{m}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u_\sigma}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_\sigma}\frac{\partial\psi}{\partial u_\nu}\right)\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\sigma}\lambda_\mu +$$

$$+ \sum_{\rho=m+1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=m+1}^{n}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u_\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_\rho}\frac{\partial\psi}{\partial u_\nu}\right)\frac{\partial B_{\nu\mu}}{\partial q_\rho}\lambda_\mu.$$

Заменяя в правой части полученного равенства $\frac{\partial\varphi}{\partial u_\sigma}$ и $\frac{\partial\psi}{\partial u_\sigma}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, m)$ их выражениями из (8) $\left(\text{для } \frac{\partial\psi}{\partial u_\sigma}\right.$ имеем аналогичное соотношение$\left.\right)$, получим:

$$\frac{d(\varphi, \psi)}{dt} = \sum_{\rho,\ \nu=m+1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial u_\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial u_\rho}\frac{\partial\psi}{\partial u_\nu}\right)E_\rho(B_{\nu\mu})\lambda_\mu =$$

$$= \sum_{\rho,\ \nu=m+1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\frac{\partial\psi}{\partial u_\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial u_\nu}\left[E_\rho(B_{\nu\mu}) - E_\nu(B_{\rho\mu})\right]\lambda_\mu. \tag{14}$$

Отсюда в силу условий (3), выражающих интегрируемость уравнений (2), получим

$$\frac{d}{dt}(\varphi, \psi) = 0,$$

и, следовательно, $(\varphi, \psi) = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Из равенства (14) следует, между прочим, что для неголономных систем установленная здесь теорема Пуассона не имеет места.

Таким образом, к уравнениям движения с множителями связей (для голономных консервативных систем) применим метод интегрирования, основанный на последовательном применении теоремы Пуассона.

Среднеазиатский государственный университет Ташкент

Поступило 27 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. К. Суслов, Теоретическая механика, изд. 3-е, 1946, стр. 461; Об уравнениях с частными производными для несвободного движения, СПб, 1888.