Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

В. А. РОХЛИН

ВНУТРЕННЕЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ ПОНТРЯГИНА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 III 1952)

Понтрягин дал два эквивалентных определения характеристических циклов гладкого ориентированного замкнутого многообразия. В первом определении ([1]) характеристические циклы многообразия M^k возникают как гомологические инварианты тангенциального отображения этого многообразия в многообразие $H(k, l)$ ориентированных k-мерных подпространств векторного пространства R^{k+l} достаточно высокой размерности. Согласно второму определению ([2]) характеристические циклы суть циклы особенностей систем векторных полей, заданных на M^k. В обоих определениях используется вложение или, по крайней мере, регулярное отображение многообразия M^k в R^{k+l}. Однако, в то время как первое определение органически связано с таким отображением и в этом смысле неизбежно должно носить внешний характер, второе определение допускает более простую и эффективную внутреннюю формулировку. Такая формулировка и дается в настоящей заметке. Предлагаемое здесь определение характеристических циклов Понтрягина аналогично определению циклов Штифеля — Уитнея ([3, 4]), содержит последнее как частный случай и пригодно для любого ориентированного косого произведения векторного пространства на конечный комплекс.

1. Векторная задача Понтрягина. Пусть R^n — векторное пространство размерности n и σ — монотонно неубывающая неотрицательная целочисленная функция целочисленного аргумента $h = 0, 1, \ldots, n-1$ с $r(\sigma) = \sigma(0) + \ldots + \sigma(n-1) \geqslant 2$. Обозначим через $h_1, \ldots, h_{s-1}$ расположенные в возрастающем порядке значения $h \geqslant 1$, при которых $\sigma(h) > \sigma(h-1)$, и положим $h_0 = 0$, $i_p = h_p + \sigma(h_p)$ $(p = 0, 1, \ldots, s-1)$. Система векторов $u_1, \ldots, u_m$ из R^n называется подчиненной (точно подчиненной) функции σ, если $m \geqslant i_{s-1}$ и ранг любой подсистемы $u_1, u_2, \ldots, u_{i_p}$ $(p = 0, 1, \ldots, s-1)$ не превосходит (соответственно равен) h_p.

Пусть Π — ориентированное косое произведение пространства R^n на конечный базисный комплекс K со слоями R^n_x $(x \in K)$. Всякая непрерывная функция F_m, определенная на K и относящая точке $x \in K$ систему m векторов слоя R^n_x, называется системой m векторных полей в Π. Точка $a \in K$ называется особой точкой системы F_m относительно σ, если система векторов $F_m(a)$ подчинена σ. Мы будем изучать σ-особенности систем F_m. Это изучение приведет нас к некоторому классу $r(\sigma)$-мерных ∇-гомологий комплекса K — характеристическому σ-классу $Y(\sigma)$ косого произведения Π.

2. Многообразие Q_σ и его гомотопические группы. Обозначим через E совокупность всевозможных систем, составленных каждая из m векторов пространства R^n. Если выбрать в R^n базис, то E представится как совокупность всевозможных вещественных матриц $\| \xi^\alpha_\beta \|$ $(\alpha = 1, \ldots, m; \beta = 1, \ldots, n)$, и мы будет считать E евклидовым пространством с координатами ξ^α_β. Клетки матрицы $\| \xi^\alpha_\beta \|$, т. е. пары (α, β) $(\alpha = 1, \ldots, m; \beta = 1, \ldots, n)$, мы разобьем на три группы: E_σ, K_σ, N_σ. Чтобы определить эти группы, обозначим через A_0 совокупность целых чисел j, удовлетворяющих неравенству $j \leqslant i_0$, через A_p с $p = 1, \ldots, s-1$ — неравенствам $i_{p-1} < j \leqslant i_p - (h_p - h_{p-1})$, через $\overline{A}_p$ $(p = 1, \ldots, s-1)$ — неравенствам $i_p - (h_p - h_{p-1}) < j \leqslant i_p$, и положим $A'_p = \overline{A}_1 + \ldots + \overline{A}_p$. Обозначим, далее, через B_p совокупность тех чисел $j = 1, \ldots, n$, которые не принадлежат к A'_p. Множество E_σ состоит из тех пар (α, β), для которых $\alpha = \beta \in A'_{s-1}$, множество K_σ — из тех, для которых при каком-нибудь значении $p = 1, \ldots, s-1$ имеем $\alpha \in A_p$, $\beta \in B_p$, и множество N_σ — из остальных пар (α, β). K_σ содержит, как легко видеть, $r(\sigma)$ пар.

Пусть P_σ — часть пространства E, состоящая из систем, подчиненных σ, и Q_σ — ее дополнение. Наше определение классов $Y(\sigma)$ основывается на следующей теореме.

Многообразие Q_σ связно, и гомотопические группы $\pi_j(Q_\sigma)$ с $j \leqslant r(\sigma) - 2$ тривиальны. $\pi_{r(\sigma)-1}(Q_\sigma)$ есть циклическая группа, свободная, если

$$n + i_0 + i_p \equiv 0 \pmod 2 \quad (p = 1, \ldots, s-1), \tag{1}$$

и имеющая порядок 2 в противном случае. Ее образующей служит гомотопический тип тождественного отображения в Q_σ как-либо ориентированной сферы

$$\sum_{(\alpha, \beta) \in K_\sigma} (\xi^\alpha_\beta)^2 = 1; \quad \xi^\alpha_\beta = 1 \ ((\alpha, \beta) \in E_\sigma); \quad \xi^\alpha_\beta = 0 \ ((\alpha, \beta) \in N_\sigma). \tag{2}$$

3. Лемма. *P_σ есть псевдомногообразие размерности $mn - r(\sigma)$, ориентируемое в том и только в том случае, если выполнено условие* (1).

Непосредственное исследование ориентируемости в рамках настоящей заметки было бы затруднительно, и мы выведем эту лемму из результатов Л. С. Понтрягина ([1]), относящихся к другим псевдомногообразиям. Положим для этого $k = n$, $l = m$, $\omega(i) = l - \sigma(k - i)$ $(i = 1, \ldots, k)$, выберем в евклидовом пространстве R^{k+l} ортонормированный базис $g_1, \ldots, g_{k+l}$, обозначим через R_i линейную оболочку системы $g_1, \ldots, g_{i+\omega(i)}$ и построим по функции ω и подпространствам $R_1, \ldots, R_k$ псевдомногообразие $Z(\omega)$ (см. ([1]), § 1, определение 2). Положим, далее, $e_i = g_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, $f_j = g_{k+l+1-j}$ $(j = 1, \ldots, l)$ и построим по базису $e_1, \ldots, e_k$, $f_1, \ldots, f_l$ область U с координатами ξ^j_i (см. ([1]), § 1, A).

Наличие координат ξ^j_i позволяет отождествить область U с пространством E. Нетрудно проверить, что после этого отождествления псевдомногообразие $Z(\omega) \cap U$ совпадет с P_σ, и наша лемма становится следствием теоремы об ориентируемости псевдомногообразий $Z(\omega)$ (см. ([1]), § 5, В).

4. Доказательство теоремы n° 2. Замкнем E несобственной точкой в сферу $E^{\cdot}$, а P_σ — в замкнутое $(mn - r(\sigma))$-мерное псевдомногообразие $P^{\cdot}_\sigma = E^{\cdot} - Q_\sigma$. По теореме двойственности многообразие Q_σ связно и целочисленные гомологические группы $\Delta^j(Q_\sigma)$ с $1 \leqslant j \leqslant r(\sigma) - 2$

тривиальны, а $\Delta^{r(\sigma)-1}(Q_\sigma)$ есть циклическая группа, свободная, если псевдомногообразие P_σ ориентируемо, т. е. если выполнено условие (1), и имеющая порядок 2 в противном случае. Образующей этой группы служит гомологический класс как-либо ориентированной границы $S^{r(\sigma)-1}$ достаточно малого $r(\sigma)$-мерного шара, нормального к псевдомногообразию P_σ в его правильной (т. е. точно подчиненной σ) точке, с центром в этой точке. Возьмем в качестве такой точки матрицу $\|\xi^\alpha_\beta\|$ с $\xi^\alpha_\beta = 1$ при $(\alpha, \beta) \in \mathrm{E}_\sigma$ и $\xi^\alpha_\beta = 0$ при $(\alpha, \beta) \in \mathrm{K}_\sigma + \mathrm{N}_\sigma$. Как показывает вычисление, мы получим тогда в качестве $S^{r(\sigma)-1}$ сферу (2). Если теперь $r(\sigma) \geqslant 3$, т. е. размерность псевдомногообразия P_σ не превосходит $mn-3$, то группа $\pi_1(Q_\sigma)$ тривиальна, и из теоремы Гуревича ([5], § 4) следует, что $\pi_j(Q_\sigma) = \Delta^j(Q_\sigma)$ и при $j = 2, \ldots, r(\sigma) - 1$. Если же $r(\sigma) = 2$, то либо $\sigma(h) = 0$ при $0 \leqslant h \leqslant n-3$ и $\sigma(n-2) = \sigma(n-1) = 1$, либо $\sigma(h) = 0$ при $0 \leqslant h \leqslant n-2$ и $\sigma(n-1) = 2$; в обоих случаях Q_σ имеет гомотопический тип многообразия собственных вращений евклидова пространства (в первом случае n-мерного, во втором случае $(n+1)$-мерного), и потому $\pi_1(Q_\sigma) = \Delta^1(Q_\sigma)$.

5. Ориентации. Занумеруем пары (α, β) в последовательность $(1, 1), \ldots, (1, n), (2, 1), \ldots, (2, n), \ldots, (m, 1), \ldots, (m, n)$. Тогда множество K_σ сделается упорядоченным, сфера (2) получит определенную ориентацию, и группа $\pi_{r(\sigma)-1}(Q_\sigma)$ получит определенную образующую. Нетрудно проверить, что эта образующая не меняется при замене положенного в основу базиса пространства R^n (см. п°2) другим базисом, определяющим ту же ориентацию пространства R^n. Таким образом, ориентации пространства R^n отвечает определенная образующая группы $\pi_{r(\sigma)-1}(Q_\sigma)$. Тем самым между всеми группами $\pi_{r(\sigma)-1}(Q_\sigma)$, отвечающими слоям R^n_x ориентированного косого произведения Π (см. п°1), устанавливается естественный изоморфизм. Мы отождествляем все эти группы в одну группу G_σ.

6. Определение характеристических классов $Y(\sigma)$. Систему m векторных полей без σ-особенностей всегда можно построить на $(r(\sigma)-1)$-мерном остове комплекса K: ее можно произвольно задать в вершинах комплекса K, а затем, пользуясь связностью многообразия Q_σ и тривиальностью групп $\pi_j(Q_\sigma)$ с $j \leqslant r(\sigma) - 2$, последовательно продолжить на 1-мерный, 2-мерный, ..., $(r(\sigma)-1)$-мерный остов Если система F_m уже задана на $(r(\sigma)-1)$-мерном остове, то на каждом $r(\sigma)$-мерном симплексе она определяет некоторый элемент группы. G_σ (см. п°5), и мы получаем $r(\sigma)$-мерный ∇-цикл y_σ с коэффициентами из G_σ — цикл σ-особенностей системы F_m. Гомологический класс $Y(\sigma)$ этого цикла не зависит от выбора системы F_m, и каждый цикл $y \in Y(\sigma)$ служит циклом σ-особенностей некоторой системы F_m. Если, в частности, $\sigma(0) = \ldots = \sigma(k-r-1) = 0$, $\sigma(k-r) = \ldots = \sigma(k-1) = 1$, то $Y(\sigma)$ есть r-мерный характеристический класс Штифеля — Уитнея [3, 4]. Если K есть ориентированное многообразие M^k, то характеристическим ∇-циклам y_σ и ∇-классам $Y(\sigma)$ отвечают двойственные характеристические Δ-циклы x_σ и Δ-классы $X(\sigma)$. Если Π есть многообразие линейных элементов многообразия M^k, то циклы x_σ совпадают с характеристическими циклами X'_σ второго определения Понтрягина (см. [2], § 2), и, следовательно, циклы y_σ, x_σ гомологичны характеристическим циклам Y_χ, X_χ $(\chi(i) = \sigma(k-i))$ первого определения Понтрягина [1].

7. Пример (теорема двойственности). Регулярное отображение ориентированного многообразия M^k в ориентированное евклидово пространство R^{k+l} определяет два ориентированных косых произведения с базой M^k: тангенциальное Π_T, слоями которого служат

касательные плоскости R_x^k, и нормальное Π_N, слоями которого служат нормальные плоскости R_x^l $(x \in M^k)$. Пусть σ — функция аргумента $h = 0, \ldots, k-1$, удовлетворяющая п° 1 (с $n = k$) и, кроме того, условию $\sigma(k-l) \leqslant l-1$. Положим

$$h'_p = l - \sigma(h_{s-p}) - 1, \quad \sigma'_p = k - h_{s-p} - 1 \quad (p = 1, \ldots, s-1),$$

$$h'_0 = \sigma'_0 = 0, \quad h'_s = l$$

и определим функцию σ' аргумента $h' = 0, \ldots, l-1$ формулой

$$\sigma'(h') = \sigma'_p \quad \text{при } h'_p \leqslant h' < h'_{p+1} \quad (p = 0, \ldots, s-1).$$

Функция σ' также удовлетворяет условиям п° 1 (с $n = l$). Функции σ отвечает характеристический класс $Y_T(\sigma)$ косого произведения Π_T, функции σ' — характеристический класс $Y_N(\sigma')$ косого произведения Π_N. Оказывается, что $Y_T(\sigma) = Y_N(\sigma')$.

Поступило
14 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., 21, 233 (1947). [2] Л. С. Понтрягин, там же, 24, 129 (1949). [3] E. Stiefel, Comment. Math. Helv., 8, 305 (1936). [4] H. Whitney, Lectures in Topology, 1941, стр. 101—141. [5] В. А. Рохлин, Усп. матем. наук, 1, 5—6 (15—16), 175 (1946).