Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

М. К. НОМОКОНОВ

О СПЕКТРЕ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СТОХАСТИЧЕСКИМ ЯДРОМ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 28 III 1952)

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y) \, dy, \tag{1}$$

ядро которого $K(x, y) > 0$ либо симметрично, либо симметризуемо, как, например, ядро корреляционного интегрального уравнения $F(x, y) / P(x)$, где $F(x, y) = F(y, x) > 0$, а $P(x) = \int_a^b F(x, y) \, dy$. Ядро уравнения (1) стохастическое, т. е.

$$\int_a^b K(x, y) \, dy = 1, \tag{2}$$

и, кроме того, ядро предполагается дифференцируемым по x нужное число раз.

Спектр ядра имеет вид

$$\lambda_0 = 1, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ldots$$

$$\varphi_0(x) \equiv 1, \ \varphi_1(x), \ \varphi_2(x), \ldots \tag{3}$$

Простота и знак λ_0 и λ_1 исследованы в работах [1, 2].

Относительно характеристических чисел уравнения (1) докажем более общую теорему.

Теорема. *Если функции*

$$\Psi_1(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} K(x, t) \, dt; \quad \Psi_2(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} \Psi_1(x, t) \, dt; \ldots$$

$$\ldots; \Psi_{n-1}(x, y) = \int_a^y \frac{\partial}{\partial x} \Psi_{n-2}(x, t) \, dt \tag{4}$$

знакопостоянны во всей области задания $\begin{pmatrix} a, & b \\ a, & b \end{pmatrix}$ *и притом*

$$\Psi_i(x, b) = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

(кроме того, очевидно, что $\Psi_i(x, a) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$*), то:* 1) *n первых характеристических чисел будут простыми и положительными, если знаки функций* $\Psi_i(x, y)$ *чередуются (начиная с* $\Psi_1(x, y) < 0$*);* 2) *n первых характеристических чисел будут простыми и знакочередующимися, если все функции* $\Psi_i(x, y)$ *будут положительны.*

Для доказательства составим сначала интегральное уравнение с ассоциированным ядром 2-й степени (см., например, [3, 5]):

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(x_1) & \varphi_{\alpha_1}(x_2) \\ \varphi_{\alpha_2}(x_1) & \varphi_{\alpha_2}(x_2) \end{vmatrix} = \frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}}{2!}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_2, y_1) \\ K(x_1, y_2) & K(x_2, y_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(y_1) & \varphi_{\alpha_1}(y_2) \\ \varphi_{\alpha_2}(y_1) & \varphi_{\alpha_2}(y_2) \end{vmatrix} dy_1\, dy_2. \tag{6}$$

Короче это запишем так:

$$\Delta\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}, & \varphi_{\alpha_2} \\ x_1, & x_2 \end{pmatrix} = \frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & x_2 \\ y_1, & y_2 \end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}, & \varphi_{\alpha_2} \\ y_1, & y_2 \end{pmatrix} dy_1\, dy_2. \tag{7}$$

При этом $\alpha_1 < \alpha_2$. Функции $\Delta\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}, & \varphi_{\alpha_2} \\ x_1, & x_2 \end{pmatrix}$ образуют полную ортонормированную систему фундаментальных функций уравнения (6), если только функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... есть полная ортонормированная система функций уравнения (1).

Положив $x_1 = x$, $x_2 = x + h$ в уравнении (6), получим

$$\varphi_{\alpha_2}(x+h)\varphi_{\alpha_1}(x) - \varphi_{\alpha_1}(x+h)\varphi_{\alpha_2}(x) =$$

$$= \frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}}{2!}\int_a^b\int_a^b [K(x, y_1)K(x+h, y_2) - K(x, y_2)K(x+h, y_1)] \times$$

$$\times [\varphi_{\alpha_2}(y_2)\varphi_{\alpha_1}(y_1) - \varphi_{\alpha_1}(y_2)\varphi_{\alpha_2}(y_1)]\, dy_1\, dy_2.$$

Применяя теорему Лагранжа, найдем:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(x) & \varphi'_{\alpha_1}(x) \\ \varphi_{\alpha_2}(x) & \varphi'_{\alpha_2}(x) \end{vmatrix} = \frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}}{2!}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(x, y_1) & K'_x(x, y_1) \\ K(x, y_2) & K'_x(x, y_2) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(y_1) & \varphi_{\alpha_1}(y_2) \\ \varphi_{\alpha_2}(y_1) & \varphi_{\alpha_2}(y_2) \end{vmatrix} dy_1\, dy_2. \tag{8}$$

После интегрирования по частям, с учетом условий (5), получается новое интегральное уравнение с ядром

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(x) & \varphi'_{\alpha_1}(x) \\ \varphi_{\alpha_2}(x) & \varphi'_{\alpha_2}(x) \end{vmatrix} = -\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\int_a^b\int_a^b K(x, y_1)\Psi_1(x, y_2) \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(y_1) & \varphi'_{\alpha_1}(y_2) \\ \varphi_{\alpha_2}(y_1) & \varphi'_{\alpha_2}(y_2) \end{vmatrix} dy_1\, dy_2. \tag{9}$$

Если $K(x, y) > 0$ и $\Psi_1(x, y) > 0$, то, в силу теоремы Иенча [6], первое число будет простым и положительным, т. е. $-\lambda_0\lambda_1 > 0$, но так как $\lambda_0 = 1$, то λ_1 будет простым и отрицательным, $\lambda_1 < 0$, а также первая фундаментальная функция

$$\varphi_0(x)\varphi'_1(x) - \varphi'_0(x)\varphi_1(x) > 0.$$

Но так как $\varphi_0(x) \equiv 1$, то $\varphi'_1(x) > 0$, следовательно, $\varphi_1(x)$ монотонная функция. Получен результат работы [2].

Рассмотрим теперь интегральное уравнение с ассоциированным ядром n-й степени.

$$\Delta\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}, & \varphi_{\alpha_2}, & \ldots, & \varphi_{\alpha_n} \\ x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\ldots\lambda_{\alpha_n}}{n!}\int_a^b \ldots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{pmatrix} \Delta\begin{pmatrix} \varphi_{\alpha_1}, & \varphi_{\alpha_2}, & \ldots, & \varphi_{\alpha_n} \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{pmatrix} dy_1 \ldots dy_n. \tag{10}$$

Полагая $x_1 = x$, $x_2 = x + h$, $x_3 = x + 2h, \ldots, x_n = x + (n-1)h$, получим по индукции уравнение, аналогичное (8), если использовать прием А. А. Маркова [4]:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(x) & \varphi'_{\alpha_1}(x) \ldots \varphi^{(n-1)}_{\alpha_1}(x) \\ \varphi_{\alpha_2}(x) & \varphi'_{\alpha_2}(x) \ldots \varphi^{(n-1)}_{\alpha_2}(x) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_n}(x) & \varphi'_{\alpha_n}(x) \ldots \varphi^{(n-1)}_{\alpha_n}(x) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{\lambda_{\alpha_1}\lambda_{\alpha_2}\ldots\lambda_{\alpha_n}}{n!}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b \begin{vmatrix} K(x, y_1) & K'_x(x, y_1) \ldots K_x^{(n-1)}(x, y_1) \\ K(x, y_2) & K'_x(x, y_n) \ldots K_x^{(n-1)}(x, y_2) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ K(x, y_n) & K'_n(x, y_n) \ldots K_x^{(n-1)}(x, y_n) \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(y_1) & \varphi_{\alpha_1}(y_2) \ldots \varphi_{\alpha_1}(y_n) \\ \varphi_{\alpha_2}(y_1) & \varphi_{\alpha_2}(y_2) \ldots \varphi_{\alpha_2}(y_n) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_n}(y_1) & \varphi_{\alpha_n}(y_2) \ldots \varphi_{\alpha_n}(y_n) \end{vmatrix} dy_1 \ldots dy_n, \qquad (11)$$

а отсюда, после интегрирования по частям с учетом условий (5), имеем

$$\begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(x) & \varphi'_{\alpha_1}(x) \ldots \varphi^{(n-1)}_{\alpha_1}(x) \\ \varphi_{\alpha_2}(x) & \varphi'_{\alpha_2}(x) \ldots \varphi^{(n-1)}_{\alpha_2}(x) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_n}(x) & \varphi'_{\alpha_n}(x) \ldots \varphi^{(n-1)}_{\alpha_n}(x) \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}\lambda_{\alpha_1}\ldots\lambda_{\alpha_n}\int\limits_a^b\ldots\int\limits_a^b K(x, y_1)\,\Psi_1(x, y_2)\ldots$$

$$\ldots \Psi_{n-1}(x, y_n) \begin{vmatrix} \varphi_{\alpha_1}(y_1) & \varphi'_{\alpha_1}(y_2) \ldots \varphi^{(n-1)}_{\alpha_1}(y_n) \\ \varphi_{\alpha_2}(y_1) & \varphi'_{\alpha_2}(y_2) \ldots \varphi^{(n-1)}_{\alpha_2}(y_n) \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \\ \varphi_{\alpha_n}(y_1) & \varphi'_{\alpha_n}(y_2) \ldots \varphi^{(n-1)}_{\alpha_n}(y_n) \end{vmatrix} dy_1 \ldots dy_n. \qquad (12)$$

1. Если $K(x, y) > 0$, $\Psi_1(x, y) > 0$, $\Psi_2(x, y) > 0, \ldots, \Psi_{n-1}(x, y) > 0$, то ядро уравнения (12) будет положительным и, следовательно, первое характеристическое число будет простым и положительным

$$(-1)^{(n-1)}\lambda_0\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1} > 0$$

и первая фундаментальная функция

$$\begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi'_0(x) \ldots & \varphi^{(n-1)}_0(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi'_1(x) \ldots & \varphi^{(n-1)}_1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \varphi_{n-1}(x) & \varphi'_{n-1}(x) \ldots & \varphi^{(n-1)}_{n-1}(x) \end{vmatrix} > 0. \qquad (13)$$

Полагая последовательно $n = 1, 2, 3, \ldots$, получим простоту n первых характеристических чисел уравнения (1), а знаки их будут чередоваться:

$$1;\ \lambda_1 < 0;\ \lambda_2 > 0;\ \lambda_3 < 0; \ldots$$

2. Если же $K(x, y) > 0$, $\Psi_1(x, y) < 0$, $\Psi_2(x, y) > 0, \ldots$, т. е. знаки функций чередуются, то n первых характеристических чисел будут простыми и положительными:

$$1;\ \lambda_1 > 0;\ \lambda_2 > 0,\ \ldots,$$

и первая фундаментальная функция также положительна.

Теорема доказана.

Следствие 1. *Фундаментальные функции уравнения* (1) $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ *образуют ряд Маркова внутри* (a, b).

Следствие очевидно, так как функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots$ удовлетворяют условию Маркова [4]

$$\varphi_0(x) > 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_0'(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi_1'(x) \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_0(x) & \varphi_0'(x) & \varphi_0''(x) \\ \varphi_1(x) & \varphi_1'(x) & \varphi_1''(x) \\ \varphi_2(x) & \varphi_2'(x) & \varphi_2''(x) \end{vmatrix} > 0, \ldots$$

для всех значений x в (a, b).

Следствие 2. *Функции* $\varphi_1(x)$; $\dfrac{\varphi_2'(x)}{\varphi_1'(x)}$; $\dfrac{[\varphi_3'(x) / \varphi_1'(x)]'}{[\varphi_2'(x) / \varphi_1'(x)]'}$; ... *будут монотонны.*

Следствие 3. *Ядро* $K(x, y)$ *является положительно определенным, если* $\operatorname{sign} \Psi_k(x, y) = (-1)^k$ *при всех* k.

Например:

1) Для ядра $G(x, y) = \dfrac{\operatorname{ch} ay \cdot \operatorname{ch} a(1-x)}{a \operatorname{sh} a}$ $(y \leqslant x)$ в интервале (0, 1) функция

$$\Psi_n(x, y) = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sh} ay \cdot \operatorname{sh} a(1-x)}{a \operatorname{sh} a} & (n \text{ нечетное}), \\ \dfrac{\operatorname{ch} ay \cdot \operatorname{ch} a(1-x)}{a \operatorname{sh} a} & (n \text{ четное}). \end{cases}$$

2) Для ядра $K(x, y) = -\ln(1-y)(1+x) + a$ $(y \leqslant x)$ в интервале $(-1, 1)$

$$\Psi_n(x, y) = (-1)^n \frac{(y+1)^n}{n!\,(x+1)^n}.$$

3) Для ядра $\dfrac{F(x, y)}{P(x)} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi(1-R)}} e^{-\frac{(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}}$ в интервале $(-\infty, \infty)$

$$\Psi_n(x, y) = \frac{(-R)^n}{\sqrt{2n(1-R^2)}} e^{-\frac{(y-Rx)^2}{2(1-R^2)}},$$

при $R > 0$ ядро положительно-определенное.

Замечание. Условие (5) для ядер типа функций Грина необязательно.

Ленинградский горный институт

Поступило
28 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] О. В. Сарманов, ДАН, **53**, № 9 (1946). [2] М. К. Номоконов, ДАН, **72**, № 6 (1950). [3] Ф. Ф. Гантмахер и М. Г. Крейн, Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, 1950. [4] А. А. Марков, Зап. императорск. Акад. наук, **6**, в. 5 (1898). [5] I. Schur, Math. Ann., **67**, H. 3, 306 (1909). [6] R. Jentzsch, Journ. f. reine u. angew. Math., **141**, H. 4, 235 (1912).