

В. Ф. НИКОЛАЕВ

О НЕКОТОРЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССАХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 III 1952)

1. Мы будем рассматривать интерполирование непрерывных функций косинус-полиномами на промежутке $[0, \pi]$. (Известно, что к этому может быть сведено интерполирование обыкновенными полиномами на конечном промежутке $[a, b]$.)

Рассмотрим линейную операцию $I_n^{(m)}(x; f)$ из $C[0, \pi]$ в себя, относящую каждой $f(x)$ из $C[0, \pi]$ некоторый \cos -полином порядка $n + m = n + m_n$ (число m может изменяться с изменением n). Операция $I_n^{(m)}(x; f)$ будет называться интерполяционной операцией, соответствующей данной треугольной матрице узлов $x_k^{(n+1)}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$; $k = 0, 1, \dots, n$) на $[0, \pi]$, если $I_n^{(m)}(x; f)$ совпадает с $f(x)$ в узлах $x_0^{(n+1)}, x_1^{(n+1)}, \dots, x_n^{(n+1)}$ (в дальнейшем верхние значки не будем выписывать).

Задание матрицы узлов и полиномов $I_n^{(m)}(x; f)$ определяет «интерполяционный процесс». Полином $I_n^{(m)}(x; f)$ вполне определится, если указать еще его значения c_1, c_2, \dots, c_m в каких-нибудь точках $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$ на $[0, \pi]$ (отличных от узлов x_k). Из линейности операции $I_n^{(m)}(x; f)$ следует, что числа c_1, c_2, \dots, c_m суть линейные функционалы от $f(x)$ в пространстве $C[0, \pi]$, так что $c_i = C_i(f) = \int_0^\pi f(t) dg_i(t)$, где $g_i(t)$ — функции ограниченной вариации.

Введем следующие обозначения: $\omega(x)$ — любой \cos -полином порядка $n + 1$ с корнями в узлах x_k ; $\sigma(x)$ — любой \cos -полином порядка m с корнями ξ_i ; $l_k(x)$ — такой \cos -полином порядка n , что $l_k(x_i) = \delta_{ik}$ ($i, k = 0, 1, \dots, n$); $\lambda_i(x)$ — такой \cos -полином порядка $m - 1$, что $\lambda_i(\xi_k) = \delta_{ik}$ ($i, k = 1, 2, \dots, m$) (символ δ_{ik} имеет обычный смысл). Тогда, как нетрудно проверить, общий вид линейной интерполяционной операции $I_n^{(m)}(x; f)$ будет

$$I_n^{(m)}(x; f) = \sum_{k=0}^n l_k(x) \frac{\sigma(x)}{\sigma(x_k)} f(x_k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(x) \frac{\omega(x)}{\omega(\xi_i)} C_i(f). \quad (1)$$

2. Узлы x_k и вспомогательные точки ξ_i будут определены с помощью некоторого \cos -полинома $\varphi(x)$.

Положим $\varphi(x) = \psi(x) + \chi(x)$, где

$$\psi(x) = \frac{1}{2M} [b_{n+1} \cos mx + b_n \cos (m + 1)x + \dots + b_1 \cos (n + m)x],$$

$$\chi(x) = -\frac{1}{2M} [b_1 \cos (n + m + 2)x + \dots + b_{n+1} \cos (2n + m + 2)x],$$

так что

$$\varphi(x) = \frac{1}{M} \sin(n+m+1)x \cdot \sum_{k=1}^{n+1} b_k \sin kx.$$

Пусть числа b_k суть коэффициенты Фурье произвольной нечетной функции $F(x)$, имеющей ограниченную вариацию на $[0, \pi]$; $F(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$. Так как частные суммы этого ряда равномерно ограничены (см., например, ⁽¹⁾, стр. 53), то при надлежащем выборе константы M (не зависящей от n и m) будем иметь: $\|\varphi(x)\| \leq 1$.

Очевидно, что $\psi(0) = \frac{1}{2M} \sum_{k=1}^{n+1} b_k = -\frac{1}{2M} \bar{S}_{n+1}(0; F)$, где $\bar{S}_{n+1}(x; F)$ есть частная сумма сопряженного ряда Фурье $-\sum_{k=1}^{\infty} b_k \cos kx$ функции $F(x)$.

Если предположить, что $F(+0) \neq 0$, то (см. ⁽¹⁾, стр. 33) $|\psi(0)| \simeq A \ln n$ (при $n \rightarrow \infty$), где A — некоторая постоянная. Итак, при произвольном m имеем: $\|\varphi(x)\| \leq 1$, $|\psi(0)| \simeq A \ln n$.

Известно (см., например, ⁽²⁾, отд. II, задача 141), что непрерывная 2π -периодическая функция $f(x)$, у которой $2n+1$ первых коэффициентов Фурье равны 0, имеет в промежутке $[0, 2\pi)$ не менее, чем $2(n+1)$ различных вещественных корней. Поэтому полином $\psi(x)$ имеет m различных вещественных корней на $[0, \pi]$; мы примем их за точки ξ_i , а за узлы x_k возьмем те из $n+m+2$ различных корней полинома $\chi(x)$, которые не совпадают с точками ξ_i .

3. Докажем теперь, что, если в выражении интерполяционной операции (1), построенной для определенных выше узлов x_k (и точек ξ_i), функции $g_i(t)$ не имеют точек разрыва в узлах x_k , то (при любом m) имеет место оценка

$$\|I_n^{(m)}\| \geq |\psi(0)|. \quad (2)$$

Рассматривая первое слагаемое в (1):

$$K_n^{(m)}(x; f) = \sum_{k=0}^n l_k(x) \frac{\sigma(x)}{\sigma(x_k)} f(x_k)$$

как операцию из $C[0, \pi]$ в себя, имеем

$$\|K_n^{(m)}\| = \max_{0 \leq x \leq \pi} \sum_{k=0}^n \left| l_k(x) \frac{\sigma(x)}{\sigma(x_k)} \right| = \sum_{k=0}^n \left| l_k(x') \frac{\sigma(x')}{\sigma(x_k)} \right|,$$

где x' — некоторая точка на $[0, \pi]$.

Операция $K_n^{(m)}(x; f)$, очевидно, оставляет неизменными сос-полиномы порядка $n+m$ вида $\sigma(x) \tau_n(x)$, где $\tau_n(x)$ — произвольный сос-полином порядка n .

Поэтому $K_n^{(m)}(x; \varphi) = K_n^{(m)}(x; \psi) + K_n^{(m)}(x; \chi) = \psi(x)$, откуда $\|K_n^{(m)}\| \geq |\psi(0)|$.

Положим теперь в (2) $x = x'$:

$$I_n^{(m)}(x'; f) = \sum_{k=0}^n l_k(x') \frac{\sigma(x')}{\sigma(x_k)} f(x_k) + \int_0^{\pi} f(t) dg(t). \quad (3)$$

Здесь обозначено $g(t) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(x') \frac{\omega(x')}{\omega(\xi_i)} g_i(t)$; для этой функции ограниченной вариации узлы x_k тоже являются точками непрерывности. Возьмем в (3) непрерывную функцию $f(x)$ так, что $\|f(x)\| = 1$ и $\int_0^{\pi} f(t) dg(t) \geq 0$.

Оставляя $f(x)$ непрерывной, изменим ее значения в малых окрестностях $[x_k - h, x_k + h]$ точек x_k так, чтобы было $f(x_k) = \text{sign} \left\{ l_k(x') \frac{\sigma(x')}{\sigma(x_k)} \right\}$ и чтобы $\|f(x)\|$ не изменилась. Из непрерывности вариации $\text{Var}_{[0, x]} g(t)$ в точках x_k следует, что при достаточно малом h изменение второго слагаемого в (3) будет как угодно мало. Поэтому, обозначив полученную функцию через $f^*(x)$, будем иметь

$$I_n^{(m)}(x', f^*) = \sum_{k=0}^n \left| l_k(x') \frac{\sigma(x')}{\sigma(x_k)} \right| + \int_0^{\pi} f(t) dg(t) \pm \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало, что и доказывает оценку (2).

Изменяя функцию $F(x)$, мы получим бесчисленное множество систем узлов x_k с указанным свойством.

4. Если взять

$$\psi(x) = \frac{1}{2M} [b_n \cos x + b_{n-1} \cos 2x + \dots + b_{p+1} \cos(n-p)x],$$

$$\chi(x) = -\frac{1}{2M} [b_{p+1} \cos(n+p+2)x + \dots + b_n \cos(2n+1)x]$$

(где p — постоянное, не зависящее от n), так что

$$\varphi(x) = \frac{1}{M} \sin(n+1)x \cdot \sum_{k=p+1}^n b_k \sin kx,$$

то опять можно получить: $\|\varphi(x)\| \leq 1$, $|\psi(0)| \simeq A \ln n$.

Рассмотрим следующую интерполяционную операцию с узлами в корнях \cos -полинома $\chi(x)$:

$$I_n^{(m)}(x; f) = \sum_{k=0}^n l_k(x) P(x, x_k) f(x_k). \quad (4)$$

Здесь $P(x, y)$ означает \cos -полином относительно каждого из своих аргументов, — порядка m относительно x , порядка p относительно y , — и притом такой, что $P(x, x) \equiv 1$. Эта операция, очевидно, оставляет неизменными \cos -полиномы порядка $n-p$. Для нормы этой операции при произвольном m опять справедлива оценка

$$\|I_n^{(m)}\| \geq |\psi(0)|. \quad (5)$$

Действительно, $I_n^{(m)}(x; \varphi) = \psi(x)$, откуда и следует (5).

5. В пп° 3, 4 мы имеем, таким образом, примеры последовательностей линейных интерполяционных операций (весьма общего вида) с неограниченно возрастающей нормой, для которых отношение порядка интерполяционного полинома к числу узлов $\frac{n+m}{n+1}$ может быть выбрано как угодно большим.

Поступило
14 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, М.—Л., 1939. ² Г. Поля и Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, М.—Л., 1937.