

Ф. И. ФРАНКЛЬ

О ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛНАХ И О ДВИЖЕНИИ ГАЗОВ В СИЛЬНЫХ, ПЕРЕМЕННЫХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЯХ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 7 III 1952)

В настоящей заметке мы рассматриваем задачу об определении гравитационного поля и движения газа при заданных начальных условиях в некоторой области на основании строгих нелинейных гравитационных уравнений Эйнштейна. Подобные задачи до сих пор решались только для слабых гравитационных полей (см., например, (1)); мы же такого предположения не делаем.

Доказывается:

1) Если начальные значения всех искомых величин — а именно компоненты метрического фундаментального тензора g_{ik} и его первые производные, параметры состояния газа и скорости его частиц — заданы в некоторой области Π пространственноподобной гиперповерхности и если эти начальные значения не противоречат гравитационным уравнениям, то задача решается единственным образом с точностью до преобразований координат, не меняющих начальных условий.

2) Границами области единственности решения являются гиперповерхности, которые определяются уравнением

$$g^{ik}a_i a_k = 0 \quad (1)$$

(a_i — ковариантные компоненты вектора нормали) и распространяются во времени внутрь области (в соответствующих координатах). Иначе говоря, существуют гравитационные волны, распространяющиеся с теми же скоростями, что и световые волны, которые определяются также уравнением (1).

Доказательство ведется следующим способом. Путем преобразования координат добьемся того, чтобы область Π лежала в гиперплоскости $x^0 = 0$. Эта область не должна нигде соприкасаться со световым конусом, т. е. должно быть

$$g^{00} \neq 0 \quad \text{на } \Pi. \quad (2)$$

Знак метрического фундаментального тензора выбираем так, чтобы для времениподобного вектора dx^i было

$$g_{ik} dx^i dx^k > 0. \quad (3)$$

Чтобы систему уравнений Эйнштейна превратить в систему уравнений первого порядка, введем в качестве искомых функций функции Кристоффеля

$$\Gamma_{i, kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right). \quad (4)$$

Тогда имеем следующие уравнения:

1. Гравитационные уравнения Эйнштейна:

$$R_{ik} = \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x^r} - \frac{\partial \Gamma_{ir}^s}{\partial x^s} + \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rs}^s - \Gamma_{ir}^s \Gamma_{ks}^r = \kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right), \quad (5)$$

где

$$\Gamma_{ik}^r = g^{rs} \Gamma_{s, ik}. \quad (5a)$$

2. Добавочные уравнения, заменяющие уравнения (4):

$$\frac{\partial}{\partial x^n} (\Gamma_{i, kl} + \Gamma_{k, li}) = \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{i, km} + \Gamma_{k, mi}). \quad (6)$$

Компоненты g_{ik} определяются путем квадратур:

$$g_{ik} = \int (\Gamma_{i, kl} + \Gamma_{kl, i}) dx^l. \quad (6a)$$

При этом (5) есть условие полного дифференциала для $(\Gamma_{i, kl} + \Gamma_{k, li}) dx^l$.

3. Выражение тензора энергии — импульса газа в случае адиабатических обратимых процессов в отсутствие излучения или поглощения электромагнитных волн:

$$T_{ik} = (\nu \tau + p) u_i u_k - p g_{ik}, \quad (7)$$

где ν — число молекул в единице объема в пространстве, движущемся вместе с газом; τ — масса покоя газа (в энергетическом масштабе) при данных термодинамических условиях, отнесенная к одной молекуле; p — давление.

Компоненты 4-мерной скорости u^i связаны тождеством

$$g_{ik} u^i u^k = 1, \quad (8)$$

а параметры состояния газа — уравнением состояния

$$p = p(\nu, \tau). \quad (9)$$

4. Уравнение неразрывности вещества

$$\frac{\partial (\sqrt{-g} \nu u^k)}{\partial x^k} = 0. \quad (10)$$

Мы имеем, следовательно, $40 + 3 + 2 = 45$ искомым функций, не связанных алгебраическими* уравнениями, а именно $\Gamma_{i, kl}$, компоненты скорости u^1, u^2, u^3 и параметры состояния газа ν, τ . Для них мы должны иметь 41 независимое уравнение, так как произвол координат позволяет еще распорядиться 4 функциями координат; действительно, среди уравнений (5) (с подстановкой T_{ik} из (7)), (6) и (10) имеем 41 независимое. В качестве таковых выбираем:

$$1) \quad R_{ik} = \kappa \left(T_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} T \right) \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (11)$$

(6 уравнений);

$$2) \quad \frac{\partial (\sqrt{-g} T_i^k)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} (\Gamma_{\alpha, \beta i} + \Gamma_{\beta, \alpha i}) \sqrt{-g} T^{\alpha \beta} = 0 \quad (12)$$

(4 уравнения энергии — импульса; они являются следствием уравнений (5));

* Здесь в смысле нефункциональными.

$$3) \quad \frac{\partial}{\partial x^l} (\Gamma_{i, k0} + \Gamma_{k, 0i}) = \frac{\partial}{\partial x^0} (\Gamma_{i, kl} + \Gamma_{k, li}) \quad (l = 1, 2, 3) \quad (13)$$

(этих уравнений 30);

$$4) \quad \frac{\partial (V - g_{\nu} u^k)}{\partial x^k} = 0. \quad (10)$$

На II задаются значения g_{ik} , $\Gamma_{i, kl}$, u^i , ν , τ . Для решения задачи нужно прежде всего найти производные величины $\Gamma_{i, kl}$, u^i , ν , τ по x^0 на II.

Величины $\partial \Gamma_{i, kl} / \partial x^0$ при $i, k, l \neq 0$, а также $\partial \Gamma_{0, 0l} / \partial x^0$ определяются на основании уравнений (13).

Величины $\partial \Gamma_{0, ik} / \partial x^0$ ($i, k \neq 0$) определяются по уравнениям (11), но только благодаря условию (2). После этого вычисляются также величины $\partial \Gamma_{i, 0l} / \partial x^0$ на основании уравнений (13).

Но величины $\partial \Gamma_{i, 00} / \partial x^0$ остаются неопределенными, как оно и должно быть из-за произвола координат.

Поэтому для привязки координат к «полю ведения»* введем любые дополнительные 4 дифференциальные уравнения, решаемые относительно $\partial \Gamma_{i, 00} / \partial x^0$:

$$\frac{\partial \Gamma_{i, 00}}{\partial x^0} = F_i. \quad (14)$$

Удобнее всего считать F_i равными нулю. Тогда

$$\frac{\partial \Gamma_{i, 00}}{\partial x^0} \equiv 0, \quad (14a)$$

и величины $\Gamma_{i, 00}$ выпадают из числа искомым функций**. Производная $\partial \nu / \partial x^0$ определяется по уравнению (10) при условии, что

$$u^0 \neq 0. \quad (15)$$

Но это условие выполнено, так как u^i — времениподобный вектор.

После этого на основании уравнений (12) (после подстановки (5)) определяется производная $\partial \tau / \partial x^0$ при том же условии (15).

Наконец, по уравнениям (12) с использованием тождества (8) и уравнения состояния (9) вычисляются также все $\partial u^i / \partial x^0$, но только при условии

$$(u^0)^2 (\nu \tau + p) - [(u^0)^2 + g^{00}] \left(\nu \frac{\partial p}{\partial \nu} + \frac{p}{\nu} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) \neq 0. \quad (16)$$

Физический смысл этого условия заключается в том, что II не соприкасается с конусом звуковых волн; оно выполнено, так как звуковые лучи имеют времениподобное направление.

Таким образом, все $\partial / \partial x^0$ вычисляются на основании начальных условий; точно так же вычисляются все $\partial^n / (\partial x^0)^n$, так что задача решается однозначно в некоторой окрестности II хотя бы методом степенных рядов С. В. Ковалевской.

* Мы пользуемся этим удачным термином Вейля, поскольку он охватывает, кроме собственно гравитационных полей ($R_{iklm} \neq 0$), также «инерциальное поле» ($R_{iklm} = 0$), на которое наш способ привязки распространяется. Поле ведения, будучи одной из форм материи, служит нам, таким образом, в определенном смысле «телом отсчета». В случае $R_{iklm} = 0$ наш способ привязки дает в числе других и обычные инерциальные системы.

** Если пользоваться уравнениями (14a), то величины $\Gamma_{0, 0l}$ и $\Gamma_{i, 0l} + \Gamma_{0, li}$ определяются посредством квадратур на основании уравнений (13).

Что касается пропущенных нами избыточных гравитационных уравнений

$$R_{i0} = \kappa (T_{i0} - 1/2 g_{i0} T), \quad (17)$$

то они превращаются, благодаря (11), в условия, содержащие только производные величины $\Gamma_{i,kl}$ по x^1, x^2, x^3 , но не по x^0 . Если они выполнены при $x^0 = 0$, то они, благодаря уравнениям (11), (12), выполняются уже везде. То же относится к пропущенным уравнениям (6) ($m, l \neq 0$).

Как видно из условий (2), (15), (16), необходимых и достаточных для вычисления соответственно производных $\partial \Gamma_{0,ik} / \partial x^0, \partial v / \partial x^0, \partial \tau / \partial x^0, \partial u^i / \partial x^0$, единственными характеристиками нашей системы * уравнений являются гиперповерхности, определяемые следующими уравнениями для вектора нормали:

а) $g^{ik} a_i a_k = 0$ (гравитационные волны), (18)

б) $a_i u^i = 0$ (гиперповерхности движения частиц), (19)

в) $\left(\sqrt{\tau} + p - v \frac{\partial p}{\partial v} - \frac{p}{v} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) (a_i u^i)^2 -$
 $- \left(v \frac{\partial p}{\partial v} + \frac{p}{v} \frac{\partial p}{\partial \tau} \right) g^{ik} a_i a_k = 0$ (звуковые волны). (20)

Таким образом, все наши утверждения доказаны.

На этих характеристиках, именно благодаря невозможности вычисления нормальных производных некоторых из искомых величин, возникают характеристические условия между ними, т. е. уравнения, содержащие производные искомых функций только по направлениям, лежащим в характеристических гиперповерхностях **. Эти условия используются для решения уравнений численным методом характеристик.

В случае двух независимых переменных метод характеристик хорошо разработан и широко применяется в газодинамике (см., например, (2)).

Этим методом можно также решить задачу, рассматриваемую в этой заметке, в случае, когда все искомые величины зависят только от двух координат $x^0 = t, x^1 = x$, из которых одна x^0 времениподобная (плоские волны), а также нестационарную сферическую задачу. При этом, конечно, не требуется, чтобы рассматриваемые волны были слабыми.

В заключение автор выражает благодарность акад. Л. Д. Ландау за ряд ценных замечаний.

Киргизский государственный
университет

Поступило
24 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, Теория поля, 1948. ² Н. Е. Кочин, И. А. Кибель и Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, 1948.

* Применительно к нашей системе, в которой число независимых уравнений меньше числа искомых функций на число независимых переменных, мы понимаем под характеристиками такие гиперповерхности Π , в окрестности которых решение не определяется по начальным данным на Π с точностью до преобразования координат.

** Дополнительно к тем уравнениям такого вида, которые, согласно уравнениям (5) и (6), имеют место вдоль всех гиперповерхностей.