

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный технический
университет имени П. О. Сухого»

Кафедра «Промышленная электроника»

Ю. Е. Котова

**ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ
ПОСОБИЕ**

*Рекомендовано учебно-методическим объединением
по образованию в области информатики и радиоэлектроники
в качестве пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по специальности 6-05-0713-02 «Электронные
системы и технологии»*

Электронный аналог печатного издания

Гомель 2025

УДК 681.5.01(075.8)
ББК 32я73
К73

*Рекомендовано научно-методическим советом
факультета автоматизированных и информационных систем
ГГТУ им. П. О. Сухого
(протокол № 7 от 28.02.2024 г.)*

Рецензенты: зав. кафедрой радиофизики и электроники ГГУ им. Ф. Скорины
канд. техн. наук, доц. *А. С. Руденков*;
директор ОАО «Гомельское конструкторское бюро «Луч» *Н. Н. Ковалев*

Котова, Ю. Е.
К73 Теория автоматического управления : пособие / Ю. Е. Котова. – Гомель : ГГТУ
им. П. О. Сухого, 2025. – 98 с. – Систем. требования: PC не ниже Intel Celeron 300 МГц ;
32 Mb RAM ; свободное место на HDD 16 Mb ; Windows 98 и выше ; Adobe Acrobat
Reader. – Режим доступа: <https://elib.gstu.by>. – Загл. с титул. экрана.
ISBN 978-985-535-562-6.

Предназначен для получения и закрепления знаний, требуемых в рамках учебной программы по предмету «Теория автоматического управления» на практических занятиях и при самостоятельной работе.

Для студентов специальности 6-05-0713-02 «Электронные системы и технологии» дневной и заочной форм обучения.

**УДК 681.5.01(075.8)
ББК 32я73**

ISBN 978-985-535-562-6

© Котова, Ю. Е., 2025
© Учреждение образования «Гомельский
государственный технический университет
имени П. О. Сухого», 2025

Оглавление

Предисловие.....	4
Глава 1. Преобразование нелинейных функций к линейному виду в окрестностях номинальных режимов	5
Глава 2. Операторные уравнения, передаточные функции, определение нулей и полюсов передаточной функции системы автоматического управления.....	12
Глава 3. Временные характеристики линейных систем.....	18
Глава 4. Алгебра структурных схем	25
Глава 5. Частотные характеристики линейных систем.....	32
Глава 6. Асимптотические логарифмические частотные характеристики линейных систем.....	40
Глава 7. Анализ устойчивости линейных систем.....	47
Глава 8. Анализ точности линейных систем.....	56
Глава 9. Математическое описание дискретных систем. Передаточные функции разомкнутых и замкнутых дискретных систем	63
Глава 10. Методы исследования нелинейных систем.....	82
Литература	98

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное пособие посвящено анализу линейных непрерывных систем управления и предназначено для подготовки студентов дневной и заочной форм обучения по специальности «Системы управления информацией» в рамках учебной программы по предмету «Теория автоматического управления». Структурно пособие разбито на десять глав, каждая из которых представляет собой отдельное занятие с необходимыми теоретическими сведениями, примерами решения задач и заданиями для самостоятельного решения. Прежде, чем приступить к решению задач, рекомендуется изучить теоретическую часть занятия для понимания принципов, и разобрать примеры решения. Также для быстрого усвоения материала пособия предлагается повторить материал и обладать достаточной компетенцией по таким предметам, как «Высшая математика», «Специальные математические методы и функции», «Теория электрических цепей».

Стоит отметить, что пособие содержит достаточный, но не исчерпывающий уровень материала для подготовки. Поэтому следует для более углубленной проработки материала обратиться к использованной при составлении пособия литературе.

ГЛАВА 1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ К ЛИНЕЙНОМУ ВИДУ В ОКРЕСТНОСТЯХ НОМИНАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ

1.1. Теоретические сведения

подавляющее большинство реальных элементов имеют нелинейные характеристики и, следовательно, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Однако многие нелинейные элементы можно линеаризовать, т. е. заменить нелинейные уравнения элемента приближенными линейными. Это позволяет для анализа и синтеза систем управления использовать методы теории линейных систем, которые наиболее просты и хорошо разработаны. Процесс преобразования нелинейных уравнений в линейные называют *линеаризацией*.

В общем *линеаризация* – процесс приведения криволинейных статических характеристик звеньев, используемых в процессе управления, к прямолинейным характеристикам.

Самым распространенным методом, используемым в процессе линеаризации, является метод малых отклонений, который допускает, что отклонения входных и выходных параметров системы в процессе управления от их установившихся значений достаточно малы. В основе метода линеаризации лежит разложение в ряд Тейлора, которое позволяет разложить нелинейную функцию нескольких переменных по степеням малых отклонений этих переменных в окрестностях значений, соответствующих заданному установившемуся режиму.

Представим геометрическую трактовку линеаризации. Изобразим графически нелинейную зависимость $y(t) = f[x(t)]$ (рис. 1.1).

Текущие значения координат y и x запишем как $y(t) = y_0 + \Delta y(t)$ и $x(t) = x_0 + \Delta x(t)$, где y_0 , x_0 – установившиеся значения; Δy , Δx – их отклонения от установившихся значений.

В рабочей точке с координатами (x_0, y_0) , определяемой установившимися значениями, заменим участок кривой касательной и получим прямую, описываемую линейным уравнением вида $y = y_n + kx$, где y_n – постоянная величина; $k = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ – коэффициент, определяемый наклоном касательной к кривой в рабочей точке (x_0, y_0) .

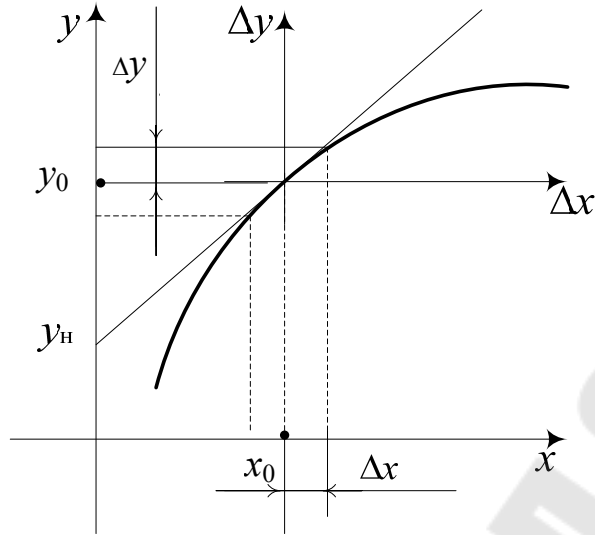


Рис. 1.1. Геометрическая интерпретация линеаризации

Для исключения из уравнения величины y_n перенесем начало координат в рабочую точку. Тогда получим линейное уравнение, связывающее между собой отклонения переменных величин от своих установившихся значений, вида $\Delta y(t) = k\Delta x(t)$.

Таким образом, линеаризация уравнения геометрически может трактоваться как замена первоначальной кривой на касательную к ней прямую в точке установившегося режима. Очевидно, что эта замена тем точнее, чем меньше величины отклонений координат элемента от своих установившихся значений в исследуемом динамическом процессе.

Модель статики в этом случае принимает вид [2]:

$$\Delta y = k\Delta x, \quad (1.1)$$

где коэффициент определяется как $k = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0} = \left. \frac{dy}{dx} \right|_0 \approx \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Уравнение (1.1) называется уравнением в отклонениях или линеаризованной моделью звена в статике. Постоянная k называется коэффициентом усиления или коэффициентом передачи. Коэффициент усиления численно равен тангенсу угла наклона касательной к статической характеристике в точке номинального режима. В формуле (1.1) и далее нижний индекс «0» означает, что значение функции вычисляется в точке установившегося режима (в точке $x = x_0$).

Если уравнение статики задано аналитически в виде $y = F(x)$, то, переходя к отклонениям и используя формулу приращений, получим $\Delta y = \left. \frac{dF}{dx} \right|_0 \Delta x = k \Delta x$, где $k = \left. \frac{dF}{dx} \right|_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_0$.

Аналогичным образом решается задача линеаризации в случае двух входных сигналов x и f , т. е. $y = F(x, f)$.

Переходя к отклонениям: $x = x_0 + \Delta x$, $f = f_0 + \Delta f$, $y = y_0 + \Delta y$, используя формулу приращений $\Delta y = \left. \frac{dF}{dx} \right|_0 \Delta x + \left. \frac{dF}{df} \right|_0 \Delta f$, получим линеаризованную модель в отклонениях:

$$\Delta y = k_1 \Delta x + k_2 \Delta f,$$

где k_1 , k_2 – коэффициенты усиления по первому и второму входу соответственно.

В общем случае при составлении уравнения динамики элемента системы (рис. 1.2), имеющего входную величину x , выходную – y и внешнее воздействие f , получается динамическое уравнение произвольного нелинейного вида:

$$F(y'', y', y) = G(x', x, f). \quad (1.2)$$

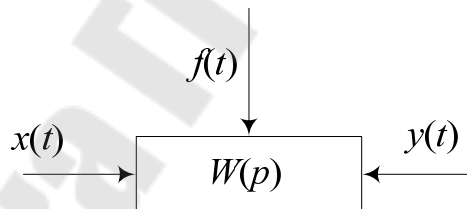


Рис. 1.2. Элемент автоматической системы

Допустим, что установившиеся значения переменных y , x и f являются постоянными величинами y_0 , x_0 , f_0 , характеризующими установившийся режим и определяющими рабочую точку элемента.

Тогда для текущих координат можно записать:

$$y(t) = y_0 + \Delta y(t);$$

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t);$$

$$f(t) = f_0 + \Delta f(t),$$

где Δy , Δx , Δf – отклонения y , x , f от своих установившихся значений.

Из (1.2) получается уравнение статики в виде:

$$F(y_0) = G[x_0, f_0]. \quad (1.3)$$

Для линеаризации уравнения (1.2) последнее раскладывают в ряд Тейлора по степеням отклонений всех координат элемента от своих установившихся значений [3]. Тогда уравнение (1.2) примет вид:

$$\begin{aligned} F(y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_0 \Delta y'' + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 \Delta y' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y = \\ = G(x_0, f_0) + \left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right)_0 \Delta x' + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial G}{\partial f}\right)_0 \Delta f + \dots \\ + (\text{члены высшего порядка малости}). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Вычитая из последнего уравнения (1.4) уравнение статики (1.3) и отбросив все последующие члены разложения как малые высшего порядка, приходим к линейному уравнению динамики элемента:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)_0 \Delta y'' + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)_0 \Delta y' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y = \left(\frac{\partial G}{\partial x'}\right)_0 \Delta x' + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial G}{\partial f}\right)_0 \Delta f. \quad (1.5)$$

Здесь нижний индекс «0» обозначает, что значения частных производных должны быть определены в точке установившегося режима элемента.

Это дифференциальное уравнение, так же как и (1.2), описывает тот же динамический процесс в том же элементе автоматической системы. Сравнивая (1.2) и (1.5), получим:

– уравнение (1.2) – точное, а уравнение (1.5) – приближенное, так как в процессе его получения были отброшены малые высшего порядка;

– уравнение (1.2) записано относительно переменных величин элемента, а уравнение (1.5) – относительно отклонений переменных от своих установившихся значений;

– уравнение (1.2) – нелинейное, уравнение (1.5) – линейное относительно отклонений, коэффициенты которого определяются рабочей точкой элемента, т. е. его установившимися значениями; при смене рабочей точки эти коэффициенты изменяются.

Таким образом, цель получения линейного дифференциального уравнения взамен прежнего нелинейного достигнута. Уравнение (1.5) называется дифференциальным уравнением элемента в отклонениях.

Пример 1.1. Требуется линеаризовать уравнение статики системы (рис. 1.2, а) в виде $y = 0,5x + x^3$ в окрестностях номинального режима при $x_0 = 2$.

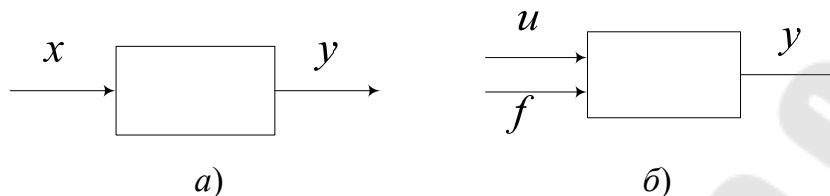


Рис. 1.2. Функциональная схема системы:
а – с одной входной переменной; б – с двумя входными переменными

Так как уравнение статики задано аналитически в виде $y = F(x)$, то, переходя к отклонениям и используя формулу приращений, получим:

$$\Delta y = \left. \frac{dF}{dx} \right|_0 \Delta x = k \Delta x,$$

$$\text{где } k = \left. \frac{dF}{dx} \right|_0 = \left. \frac{dy}{dx} \right|_0 = \left. \frac{d(0,5x + x^3)}{dx} \right|_0 = 0,5 + 3x^2 \Big|_0 = 12,5.$$

Таким образом, $\Delta y = k \Delta x = 12,5(x - 2)$, где $\Delta x = x - x_0 = x - 2$.

Окончательный результат получаем в виде $y = y_0 + \Delta y$, где значение y_0 из выражения $y_0 = 0,5x + x^3 \Big|_0 = 9$: $y = 9 + 12,5x - 25 = 12,5x - 14$.

Рассмотрим линеаризацию уравнения статики системы с двумя входными переменными (рис. 1.2, б), описываемую уравнением $y = 2u^2 f + f^3 + 2u$ в окрестностях режима с начальными точками входных переменных: $u_0 = 2$, $f_0 = 1$.

Уравнение статики задано аналитически в виде $y = F(u, f)$, переходя к отклонениям и используя формулу приращений, получим:

$$\Delta y = \left. \frac{dF}{du} \right|_0 \Delta u + \left. \frac{dF}{df} \right|_0 \Delta f = k_1 \Delta u + k_2 \Delta f.$$

Вычисляем:

$$k_1 = \left. \frac{dF}{du} \right|_0 = \left. \frac{d(2u^2 f + f^3 + 2u)}{du} \right|_0 = 4u + 2 \Big|_0 = 10;$$

$$k_2 = \left. \frac{dF}{df} \right|_0 = \left. \frac{d(2u^2 f + f^3 + 2u)}{df} \right|_0 = 2 + 3f^2 \Big|_0 = 5;$$

$$\Delta y = k_1 \Delta u + k_2 \Delta f = 10 \Delta u + 5 \Delta f = 10(u - 2) + 5(f - 1) = 10u + 5f - 25.$$

Определим начальное значение выходной переменной: $y_0 = 2u^2 f + f^3 + 2u \Big|_0 = 13$, окончательный результат получаем в виде $y = y_0 + \Delta y$: $y = 13 + 10u + 5f - 25 = 10u + 5f - 12$.

Пример 1.2. Требуется линеаризовать уравнение динамики (ДУ) в окрестностях номинальных режимов для системы, заданной дифференциальным уравнением: $3xy - 4x^2 + 1,5 \frac{dx}{dt} y = 5 \frac{dy}{dt} + y$.

Данное ДУ является нелинейным из-за наличия произведений переменных x и y .

Линеаризуем его в окрестности точки с координатами $x_0 = 1$, $x'_0 = 0$, $y'_0 = 0$. Для определения недостающего начального условия y_0 подставим данные значения в ДУ: $3y_0 - 4 + 0 = 0 + y_0$, откуда $y_0 = 2$.

Введем в рассмотрение функцию $F = 3xy - 4x^2 + 1,5x'y - 5y' - y$ и определим все ее производные при заданных начальных условиях:

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_0 = (3y - 8x) \Big|_0 = 3 \cdot 2 - 8 \cdot 1 = 2;$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_0 = (3x + 1,5x') - 1 \Big|_0 = 3 \cdot 1 + 1,5 \cdot 1 - 1 = 2;$$

$$\left. \frac{\partial F}{\partial x'} \right|_0 = (1,5y) \Big|_0 = 1,5 \cdot 2 = 3, \quad \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_0 = -5.$$

Теперь, используя полученные коэффициенты, можно записать окончательное линейное ДУ: $-5\Delta y' + 2\Delta y + 3\Delta x' - 2\Delta x = 0$.

Линеаризация ДУ, заданного в явном виде относительно y , т. е. $y = F(x)$, производится по формуле $y = \frac{\partial F}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial F}{\partial x'} \Delta x' + \frac{\partial F}{\partial x''} \Delta x'' + \dots$, т. е. в данном случае нет необходимости искать производные по переменной y .

Окончательный вариант линеаризации: $-5 \frac{dy}{dt} + 2y = -3 \frac{dx}{dt} + 2x$.

1.2. Задание на практическое занятие

1.2.1. Линеаризовать уравнения статики и динамики системы с одним входом в окрестностях номинальных режимов, согласно своему варианту при заданных начальных условиях.

1.2.2. Линеаризовать уравнения статики и динамики системы с двумя входами в окрестностях номинальных режимов согласно своему варианту при заданных начальных условиях.

Варианты индивидуальных заданий согласно номеру студента по журналу группы размещены на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно назначение индивидуальных заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Что означает термин «линеаризация»?
2. Какой распространенный метод используется в процессе линеаризации и в чем он заключается?
3. В чем заключается геометрическая интерпретация линеаризации?
4. Как осуществляется линеаризация уравнений статики?
5. Как осуществляется линеаризация уравнений динамики?

ГЛАВА 2. ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ, ОПРЕДЕЛЕНИЕ НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Теоретические сведения

В общем виде линеаризованное дифференциальное уравнение, описывающее любую систему автоматического управления (САУ) (или звено) без учета внешних воздействий, можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = \\ = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx(t)}{dt} + a_m x(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $x(t)$, $y(t)$ – входная и выходная величины элемента системы; a_i , b_i – постоянные коэффициенты.

Причем левая часть уравнения (верхняя строка) описывает преобразование выходного сигнала объекта управления $y(t)$, а правая часть (нижняя строка) – преобразование входного воздействия $x(t)$.

Решение такого дифференциального уравнения классическими методами для нахождения выходного сигнала $y(t)$ в общем случае задача очень трудоемкая. Исследование САУ существенно упрощается при использовании прикладных математических методов операционного исчисления.

Рассмотрим некоторый элемент системы, имеющий один вход и один выход (рис. 2.1).

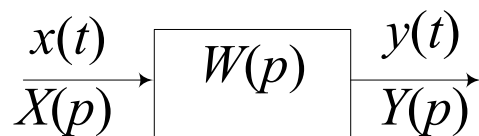


Рис. 2.1. Представление элемента САУ, имеющего один вход и один выход

Уравнение (2.1) удобнее записывать в символическом виде, введя алгебраизированный символ дифференцирования, определив $\frac{d}{dt} = p$, $\frac{d^n}{dt^n} = p^n$. При этом вместо функций времени $x(t)$ и $y(t)$ введем функции $X(p)$ и $Y(p)$ комплексного переменного p (где $p = \alpha + j\omega$), поставив условием, что эти функции связаны зависимостями:

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt, \quad Y(p) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-pt} dt. \quad (2.2)$$

В результате уравнение примет вид:

$$\begin{aligned} a_0 p^n Y(p) + a_1 p^{n-1} Y(p) + \dots + a_{n-1} p Y(p) + a_n Y(p) = \\ = b_0 p^m X(p) + b_1 p^{m-1} X(p) + \dots + b_{m-1} p X(p) + a_m X(p). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, будем называть преобразованием Лапласа следующее выражение:

$$X(p) = L\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-pt} dt. \quad (2.4)$$

При этом $x(t)$ называют оригиналом, $X(p)$ – изображением или изображением по Лапласу. Оригинал обозначают строчной, а его изображение – одноименной прописной буквой. В литературе иногда разделяют символ дифференцирования p , определяемый как $p = \frac{d}{dt}$, и переменную преобразования Лапласа, которую обозначают как s , заменяя в уравнениях (2.2)–(2.4) символ дифференцирования p на оператор Лапласа s , где (где $s = \alpha + j\omega$) [1].

Соотношение (2.5) называют обратным преобразованием Лапласа:

$$x(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(p) e^{pt} dt \right\}. \quad (2.5)$$

Кроме того, преобразование дифференциального уравнения по Лапласу дает возможность ввести понятие *передаточной функции* $W(p)$ в виде отношения изображения выходной величины к изображению входной.

Для этого вынесем в уравнении (2.3) $X(p)$ и $Y(p)$ за скобки, получим:

$$\begin{aligned} Y(p)(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) = \\ = X(p)(b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + a_m), \end{aligned}$$

тогда

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + a_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n}. \quad (2.6)$$

Отношение изображения выходной величины элемента (или системы) к изображению его входной величины при нулевых начальных условиях называется *передаточной функцией* элемента (или системы).

Передаточная функция $W(p)$ является дробно-рациональной функцией комплексной переменной p и находится при нулевых начальных условиях. $W(p)$ характеризует динамические свойства системы, она не зависит от управляющего воздействия и полностью определяется параметрами системы посредством коэффициентов a_i и b_i .

Степень полинома знаменателя передаточной функции (2.6) определяет *порядок системы*, а сам знаменатель называют *характеристическим полиномом*. В реальных системах степень полинома числителя передаточной функции не превышает степени полинома знаменателя. Это условие называют *физической реализуемостью САУ*; оно означает, что нельзя создать систему, передаточная функция которой не удовлетворяла бы этому условию.

Корни полинома числителя передаточной функции (2.6) называют *нулями*, а корни полинома знаменателя – *полюсами САУ*, которые так же как нули, могут принимать вещественные и комплексные значения. Если все корни полиномы знаменателя различны, то полюса функции называются *простыми*. Если же среди этих чисел встречаются одинаковые, то соответствующие полюсы называются *кратными*.

По передаточной функции $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ системы можно определить начальное и конечное значение выходной величины при подаче на ее вход дельта-функции.

Для этого нужно воспользоваться теоремами о предельных значениях в следующем виде:

– если $f(t)$ – оригинал, а $F(p)$ – его изображение, то начальное значение функции определится, как

$$f(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p); \quad (2.7)$$

– если существует предел $f(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$, то конечное значение:

$$f(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} pF(p). \quad (2.8)$$

С учетом того, что изображение дельта-функции равно единице, то $W(p) = Y(p)$, и в этом случае по формулам (2.7), (2.8) вычисляется начальное и конечное значения выходной величины $y(t)$ системы с передаточной функцией $W(p)$.

Пример 2.1. Определить передаточную функцию системы по дифференциальному уравнению, характеризующему ее динамику, где $x(t)$ и $y(t)$ – сигналы на входе и выходе системы соответственно. Определить нули и полюса передаточной функции. По передаточной функции определить начальное и конечное значения выходной величины при подаче на ее вход дельта-функции.

Пусть система описывается следующим уравнением:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = 2x(t) + \frac{dx(t)}{dt}.$$

Заменим функции времени $x(t)$ и $y(t)$ на их изображения по Лапласу $X(p)$ и $Y(p)$ комплексной переменной p , определяемой как $p = \frac{d}{dt}$.

Операторное уравнение (при нулевых начальных условиях) в данном случае примет вид:

$$p^2 Y(p) + 5pY(p) + 6Y(p) = 2X(p) + pX(p),$$

откуда, вынеся за скобки $X(p)$ и $Y(p)$, определяем:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{2 + p}{p^2 + 5p + 6}.$$

Нуль передаточной функции (корень выражения $2 + p = 0$) – определится: $p = -2$, полюса передаточной функции (корни выражения $p^2 + 5p + 6 = 0$): $p_1 = -2$, $p_2 = -3$.

Определим передаточную функцию по следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5 \int y(t) dt + 2y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t).$$

Воспользуемся свойством: дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению, т. е. $d(\int f(x) dx) = f(x)$, и продифференцируем данное выражение. Получим: $\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 5y(t) + 2 \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dx^2(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt}$. Заменяем функции времени $x(t)$ и $y(t)$ на их изображения по Лапласу $X(p)$ и $Y(p)$.

Тогда передаточная функция определится в следующем виде:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{p^2 + p}{p^2 + 5p + 2}.$$

По передаточной функции $W(p) = \frac{p^2 + p}{p^2 + 5p + 2}$ системы определим начальное и конечное значения выходной величины при подаче на ее вход дельта-функции:

– начальное значение

$$y(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p^2 + p}{p(p^2 + 5p + 2)} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{p + 1}{p^2 + 5p + 2} = 0;$$

– установившееся значение

$$y(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^2 + p}{p(p^2 + 5p + 2)} = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p + 1}{p^2 + 5p + 2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

2.2. Задание на практическое занятие

2.2.1. По заданным дифференциальным уравнениям записать передаточные функции систем, определить ее нули и полюса.

2.2.2. По найденной передаточной функции определить начальное и конечное значения выходной величины при подаче на вход системы дельта-функции.

2.2.3. По заданной передаточной функции системы определить ее нули и полюса и записать дифференциальное уравнение.

Варианты индивидуальных заданий согласно номеру студента по журналу группы размещены на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно индивидуальное назначение заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Что такое передаточная функция?
2. Как связаны передаточная функция и дифференциальное уравнение, описывающее функционирование системы?
3. Что такое характеристический полином?
4. Что такое нули и полюса передаточной функции?
5. Как по передаточной функции можно определить начальное значение выходной величины при подаче на вход системы дельта-функции?
6. Как по передаточной функции можно определить конечное значение выходной величины при подаче на вход системы дельта-функции?

ГЛАВА 3. ВРЕМЕННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

3.1. Теоретические сведения

Под временными характеристиками в общем случае понимается графическое изображение процесса изменения выходной величины в виде функции времени при переходе системы из одного равновесного состояния в другое в результате поступления на вход системы некоторого типового воздействия.

Так как дифференциальное уравнение системы тоже определяет изменение выходной величины в функции времени при некоторых начальных условиях, то временная характеристика изображает собой решение дифференциального уравнения для принятого типового воздействия и, следовательно, полностью характеризует динамические свойства системы.

Так как временные характеристики могут быть получены не только путем решения дифференциального уравнения, но и экспериментально, то возможность определения динамических свойств системы по временной характеристике имеет исключительно важное практическое значение, поскольку в этом случае не требуется выводить и решать дифференциальное уравнение.

Следовательно, временные характеристики при прочих равных условиях зависят от вида типового воздействия. В теории автоматического управления наиболее часто используются два вида типовых воздействий, подаваемых на вход звена или системы:

1. Единичная ступенчатая функция $1(t)$ (единичная ступень) математически определяется в виде:

$$f(t) = 1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0; \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

При этом ее изображение по Лапласу – $L\{1(t)\} = \frac{1}{p}$.

2. Дельта-функция $\delta(t)$ (единичный импульс, дельта-импульс) математически определяется в следующем виде:

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0; \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

Дельта-функция имеет изображение по Лапласу $L\{\delta(t)\} = 1$.

Импульсное воздействие представляет собой бесконечно узкий импульс, при этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

Связь между дельта-функцией и единичным импульсом определяется как

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}.$$

Графическое изображение реакции системы на единичное ступенчатое воздействие называется *переходной* характеристикой.

Аналитическое выражение *переходной характеристики* обозначается $h(t)$ и называется *переходной функцией*.

Переходную функцию можно определить через передаточную функцию системы в виде:

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W(p)}{p} \right\}, \quad (3.1)$$

где $\frac{1}{p}$ – изображение по Лапласу единичной функции.

Графическое изображение реакции системы на единичное импульсное воздействие называется *импульсной переходной* характеристикой.

Аналитическое выражение импульсной переходной характеристики обозначается $w(t)$ называется *импульсной переходной функцией* или *весовой функцией* (функцией веса).

Учитывая, что изображение по Лапласу дельта-импульса равно единице, импульсную функцию можно определить через передаточную функцию системы в виде:

$$w(t) = L^{-1} \{W(p)1\} = L^{-1} \{W(p)\}.$$

Связь между переходной и импульсной переходной функциями:

$$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} \quad \text{или} \quad h(t) = \int_0^t w(t) dt. \quad (3.2)$$

Пример 3.1. Определить весовую функцию $w(t)$ и переходную функцию $h(t)$ линейной САУ с передаточной функции вида:

$$W(p) = \frac{10}{p(0,1p + 1)}.$$

Изображением весовой функции $L[g(t)]$ линейной САУ является ее передаточная функция: $g(t) = L^{-1}\{W(p)\}$, поэтому для отыскания оригинала весовой функции $g(t)$ разложим $W(p)$ на элементарные дроби, соответствующие передаточным функциям отдельных звеньев системы САУ, которые можно определить по таблице изображений (справочная литература).

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов для определения неизвестных статических коэффициентов усиления этих звеньев (коэффициенты A и B в знаменателе элементарных дробей):

$$\frac{10}{p(0,1p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{0,1p+1}. \quad (3.3)$$

После приведения правой части выражения (3.3) к общему знаменателю приравниваем числители левой и правой частей полученного уравнения:

$$10 = A(0,1p+1) + Bp = p(0,1A+B) + A. \quad (3.4)$$

Приравнивая коэффициенты левой и правой частей уравнения (3.4) при одинаковых степенях p , получим систему двух уравнений из двух неизвестных:

$$\begin{cases} 10 = A; \\ 0 = 0,1A + B, \end{cases}$$

откуда $A = 10$, $B = -1$.

Подставляя вычисленные значения коэффициентов A и B в уравнение (3.3), получим:

$$\frac{10}{p(0,1p+1)} = \frac{10}{p} - \frac{1}{0,1p+1} = 10 \left(\frac{1}{p} - \frac{0,1}{0,1p+1} \right) = 10 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+10} \right). \quad (3.5)$$

Переход от изображений элементарных функций $f(p)$ в операторной форме записи к их оригиналам как функций времени $f(t)$ осуществляется, как правило, с использованием стандартных таблиц изображений, приводимых в справочной литературе.

Так, например, оригинал функции, имеющий изображение $\frac{1}{p}$, определяется как $L^{-1}\left\{\frac{1}{p}\right\} = 1$; оригинал функции, имеющий изображение $\frac{1}{p+10}$, равен: $L^{-1}\left\{\frac{1}{p+10}\right\} = e^{-10t}$.

Заменяя в правой части уравнения (3.5) изображения элементарных функций на их оригиналы, получим искомое выражение для весовой функции:

$$w(t) = 10(1 - e^{-10t}).$$

Задаваясь различными значениями t , следует построить график импульсной характеристики $w(t)$.

По известной весовой функции $w(t)$ можно найти переходную функцию $h(t)$, принимая во внимание, что $h(t) = \int_0^t w(t) dt$, либо воспользовавшись формулой (3.1):

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{10}{p(0,1+p)} \frac{1}{p} \right\}. \quad (3.6)$$

Разложим правую часть уравнения (3.6) на элементарные дроби с тем, чтобы получить более простые изображения функций для нахождения их оригиналов:

$$\frac{10}{p(0,1p+1)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{0,1p+1}. \quad (3.7)$$

После приведения правой части выражения (3.7) к общему знаменателю из равенства числителей левой и правой частей полученного уравнения выделяем коэффициенты при одинаковых степенях p . Получаем систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 10 = B; \\ 0 = 0,1A + B; \\ 0 = 0,1A + C, \end{cases}$$

откуда $A = -0,1$, $B = -1$, $C = 0,1$.

Подставляя вычисленные значения коэффициентов A , B и C в уравнение (3.7), получим:

$$\frac{10}{(0,1 \cdot p + 1)p \cdot p} = -\frac{1}{p} + \frac{10}{p^2} + \frac{0,1}{0,1p+1} = 10 \left(\frac{1}{p^2} - 0,1 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+10} \right) \right).$$

Воспользовавшись таблицами изображений, получим искомое выражение для переходной функции:

$$h(t) = 10(t - 0,1(1 - e^{-10t})).$$

Определить выражение для весовой характеристики можно также, воспользовавшись теоремой разложения: если $X(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ является дробно-рациональной функцией, где $A(p)$, $B(p)$ – полиномы от (p) , причем степень полинома числителя меньше полинома знаменателя, то ее оригиналом является функция

$$x(t) = \sum_{k=1}^q \frac{1}{(n_k - 1)!} \lim_{p \rightarrow p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} (X(p)(p - p_k)^{n_k} e^{pt}), \quad (3.8)$$

где p_k – корни уравнения $A(p) = 0$; n_k – степень их кратности и q – число различных корней.

Если указанные корни простые, то формула преобразуется к виду:

$$x(t) = \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (3.9)$$

здесь n – степень полинома $A(p)$; $A'(p_k) = \left. \frac{dA(p)}{dp} \right|_{p=p_k}$.

Выражение (3.9) называют еще формулой Хевисайда.

Если функция имеет нулевой корень, т. е. $X(p) = \frac{B(p)}{pA(p)}$, то формула разложения определится как

$$x(t) = \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{p_k \cdot A'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (3.10)$$

Формулы (3.8)–(3.10) справедливы при $t \geq 0$. При $t < 0$ по определению функции-оригинала $x(t) \equiv 0$.

Пример 3.2. Определить импульсную (весовую) функцию $g(t)$ и переходную функцию $h(t)$ линейной САУ с передаточной функции вида: $W(p) = \frac{5p + 1}{p(4p^2 + 3p + 1)}$ при помощи теоремы разложения.

Весовая функция определяется как $g(t) = L^{-1}\{W(p)\}$;
 $W(p) = \frac{5p+1}{p(4p^2+3p+1)} = \frac{B(p)}{pA(p)}$, тогда $A(p) = 4p^2 + 3p + 1$, $B(p) = 5p + 1$,
 $A'(p) = 12p^2 + 6p$.

Корни уравнения $4p^2 + 3p + 1 = 0$ – комплексно-сопряженные:
 $p_{1,2} = -0,375 \pm j0,331$.

По формуле разложения получаем:

$$\begin{aligned}
 w(t) &= \frac{B(0)}{A(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{B(p_k)}{p_k \cdot A'(p_k)} e^{p_k t} = \\
 &= \frac{1}{1} + \frac{5(-0,375 + j0,331) + 1}{12(-0,375 + j0,331)^2 + 6(-0,375 + j0,331)} e^{(-0,375 + j0,331)t} + \\
 &+ \frac{5(-0,375 - j0,331) + 1}{12(-0,375 - j0,331)^2 + 6(-0,375 - j0,331)} e^{(-0,375 - j0,331)t} = \\
 &= 1 - \frac{0,875 + j1,655}{1,688 + j2,979 - 1,315 - 2,25 + j1,986} e^{(-0,375 + j0,331)t} - \\
 &- \frac{0,875 - j1,655}{1,688 + j2,979 - 1,315 - 2,25 - j1,986} e^{(-0,375 - j0,331)t} = \\
 &= 1 - \frac{0,875 + j1,655}{-0,123 + j0,993} e^{(-0,375 + j0,331)t} - \frac{0,875 - j1,655}{-0,123 - j0,993} e^{(-0,375 - j0,331)t} = \\
 &= 1 - \frac{(0,875 + j1,655)(-0,123 - j0,993)}{(-0,123 + j0,993)(-0,123 - j0,993)} e^{(-0,375 + j0,331)t} - \\
 &- \frac{(0,875 - j1,655)(-0,123 + j0,993)}{(-0,123 - j0,993)(-0,123 + j0,993)} e^{(-0,375 - j0,331)t} = \\
 &= 1 - \frac{-1,751 + j1,073}{0,15 + 0,986} e^{(-0,375 + j0,331)t} - \frac{-1,751 - j1,073}{0,15 + 0,986} e^{(-0,375 - j0,331)t} = \\
 &= 1 - (1,541 - j0,945) e^{(-0,375 - j0,331)t} + (1,541 - j0,945) e^{(-0,375 - j0,331)t} = \\
 &= 1 - e^{-0,375t} \cos(0,331t) + (1,541 - j0,945) e^{(-0,375 - j0,331)t} = \\
 &= 1 - e^{-0,375t} \cos(0,331t) + 1,89 e^{-0,375t} \sin(0,331t).
 \end{aligned}$$

3.2. Задание на практическое занятие

3.2.1. По заданной передаточной функции определить импульсную характеристику $w(t)$ путем разложения передаточной функции на элементарные дроби.

3.2.2. Построить график полученной импульсной характеристики $w(t)$.

3.2.3. По заданной передаточной функции определить переходную характеристику $h(t)$ при помощи теоремы разложения.

3.2.4. При помощи выражения (3.2) определить импульсную характеристику $w(t)$.

3.2.5. Построить графики полученных характеристик.

Варианты индивидуальных заданий согласно номеру студента по журналу группы размещены на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно назначение индивидуальных заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Какая характеристика системы называется переходной?
2. Какая характеристика системы называется импульсной?
3. Как по передаточной функции определить передаточную функцию?
4. Как по передаточной функции определить импульсную функцию?
5. Какая связь существует между переходной и импульсной переходной функциями?

ГЛАВА 4. АЛГЕБРА СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

4.1. Теоретические сведения

Структурной схемой системы управления называют графическое представление ее математической модели в виде соединений звеньев, изображаемых в виде прямоугольников или кругов (для сумматора), с указанием входных и выходных переменных. Обычно внутри прямоугольника указывается условное обозначение оператора изображаемого им звена, а сам оператор в виде передаточной функции или дифференциального уравнения задается вне структурной схемы.

В сумматоре входные переменные складываются (рис. 4.1), или вычитаются, если соответствующий вход помечен знаком «минус» или заштрихован соответствующий сектор.

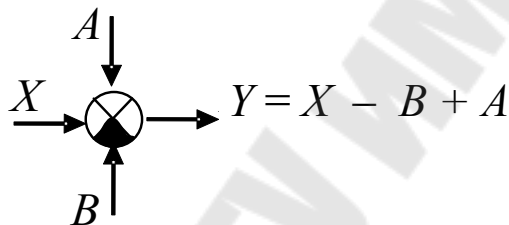


Рис. 4.1. Условное изображение сумматора

Рассмотрим основные типы соединений и правила их преобразования.

Последовательное соединение. Так называется соединение, при котором выходная переменная предшествующего звена является входной переменной последующего звена (рис. 4.2). При последовательном соединении передаточные функции отдельных звеньев перемножаются, и при преобразовании структурных схем цепочку из последовательно соединенных звеньев можно заменить одним звеном с передаточной функцией, равной произведению передаточных функций

звеньев: $W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p)$.

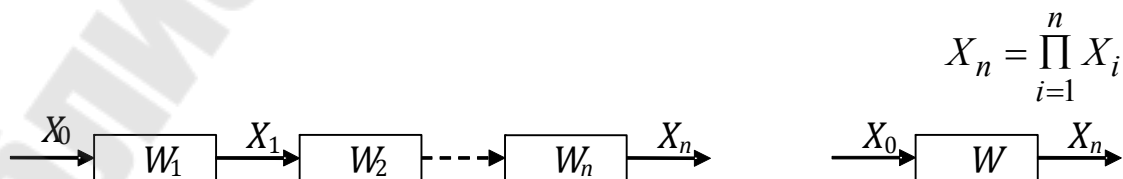


Рис. 4.2. Последовательное соединение звеньев

Параллельное соединение. Так называется соединение, при котором на входы всех звеньев подается одно и то же воздействие, а их выходные переменные складываются. При параллельном соединении звеньев передаточные функции складываются, и при преобразовании их можно заменить одним звеном с передаточной функцией $W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p)$ (рис. 4.3). Если выход какого-либо звена поступает на сумматор с отрицательным знаком, то передаточная функция этого звена складывается с отрицательным знаком, т. е. вычитается.

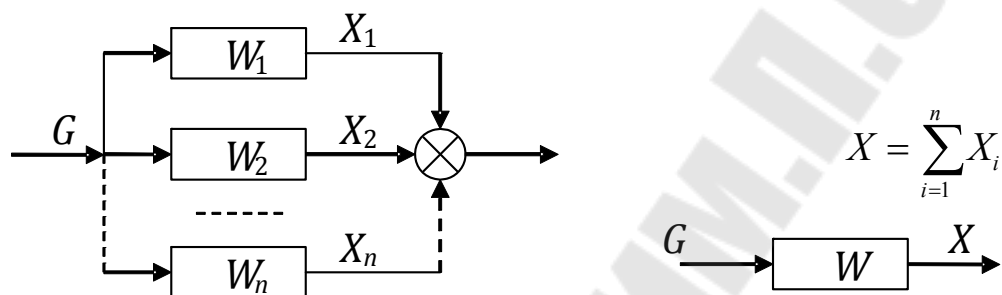


Рис. 4.3. Параллельное соединение звеньев

Обратная связь. Такое соединение звеньев изображено на рис. 4.4, оно характеризуется тем, что выходной сигнал звена подается на его вход.

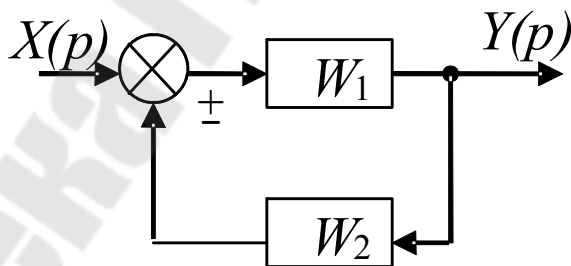


Рис. 4.4. Соединение звеньев по схеме с обратной связью

Обратная связь может быть положительной (ПОС), если сигнал $Y(p)$, снимаемый с выхода второго звена, суммируется с сигналом $X(p)$ на входе, и отрицательной (ООС), если $Y(p)$ вычитается. Кроме того, обратные связи могут быть жесткими и гибкими. Связь называется гибкой, если передаточная функция $W_2(p)$ в установившемся режиме равна нулю.

Для определения результирующей передаточной функции такой комбинации звеньев запишем очевидные соотношения:

$$\begin{cases} Y(p) = W_1(p)(X(p) \pm Y(p)); \\ Y(p) = W_2(p)Y(p), \end{cases}$$

где знак «+» относится к положительной, а знак «-» – к отрицательной обратной связи.

Откуда результирующая передаточная функция обратной связи имеет вид:

$$W(p) = \frac{W_1(p)}{1 \pm W_2(p)W_1(p)},$$

где знак «+» соответствует ООС; знак «-» – ПОС.

В общем случае сложная цепь динамических звеньев, образующих систему управления, включает в себя комбинации всех трех рассмотренных случаев, т. е. представляет собой смешанное соединение звеньев.

В тех случаях, когда структурная схема системы оказывается сложной и содержит перекрестные связи, ее упрощают и сводят к простейшему эквивалентному виду, пользуясь правилами преобразования структурных схем, изложенными ниже.

Перенос сумматора. При переносе сумматора по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится звено (рис. 4.5, а). При переносе сумматора против хода сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится сумматор (рис. 4.5, б).

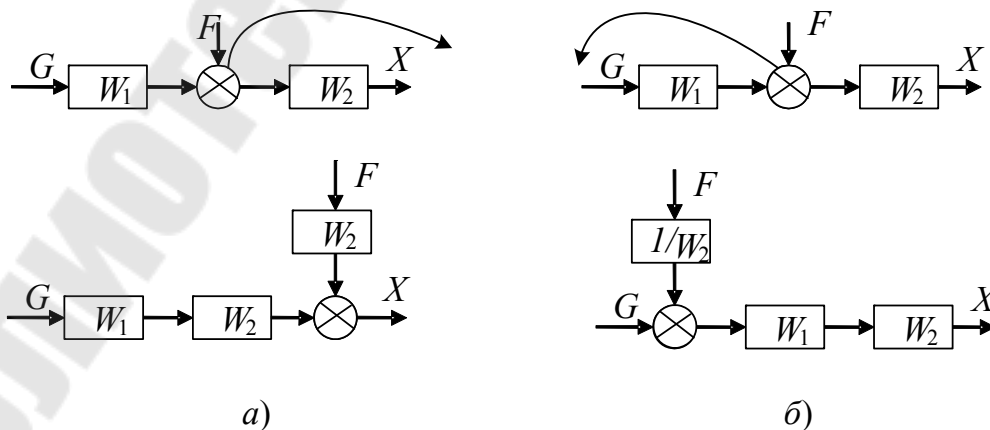


Рис. 4.5. Перенос сумматора:
а – по ходу сигнала; б – против хода сигнала

При переносе сумматора участок цепи, через который переносится сумматор, становится неэквивалентным. Поэтому при преобразовании структурных схем нельзя переносить сумматор через точку съема сигнала.

Перенос узла. При переносе узла по ходу сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной обратной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 4.6, а). При переносе узла против хода сигнала добавляется звено с передаточной функцией, равной передаточной функции звена, через которое переносится узел (рис. 4.6, б).

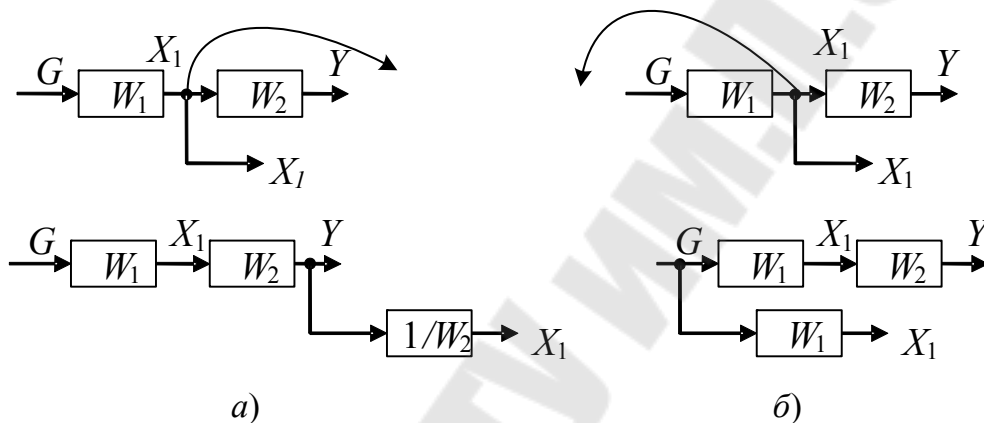


Рис. 4.6. Перенос узла:

а – по ходу сигнала; б – против хода сигнала

Вычисление передаточной функции многоконтурной системы. Путем переноса воздействий ликвидируются пересекающиеся связи. При переносе пользуются принципом суперпозиции и рассмотренными выше передаточными функциями последовательно и параллельно соединенных звеньев. В полученных таким образом эквивалентных схемах результат преобразования сигналов должен совпадать с результатом преобразования сигналов исходной схемой.

Для вычисления передаточной функции системы автоматического управления любой сложности можно также составить систему уравнений, включающую в себя входное воздействие $U_{\text{вх}}$, выходное воздействие $U_{\text{вых}}$, и сигналы на выходе каждого из сумматоров схемы. Решая полученную систему уравнений, можно найти соотношение $\frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}}$, что и является передаточной функцией системы [6].

Рассмотрим примеры нахождения передаточной функции системы различными способами.

Пример 4.1. Определить эквивалентную передаточную функцию системы автоматического управления, функциональная схема которой изображена на рис. 4.7, путем перестановки элементов.

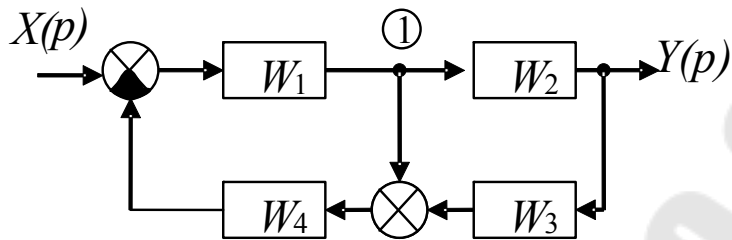


Рис. 4.7. Функциональная схема САУ к примеру 4.1

Перенесем узел 1 по ходу сигнала через звено с передаточной функцией W_2 . Преобразованная схема изображена на рис. 4.8.

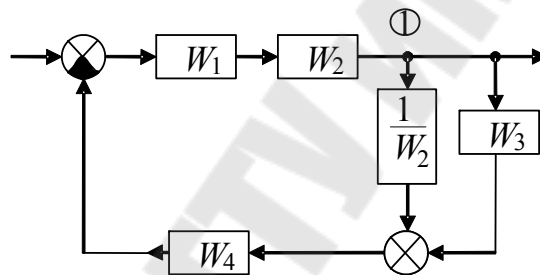


Рис. 4.8. Преобразованная схема после переноса узла

Продолжим преобразования в схеме, заменив последовательно и параллельно соединенные звенья их эквивалентами (рис. 4.9).

Звенья с передаточными функциями $\frac{1+W_2W_3}{W_2}$ и W_4 включены последовательно в цепь отрицательной обратной связи.

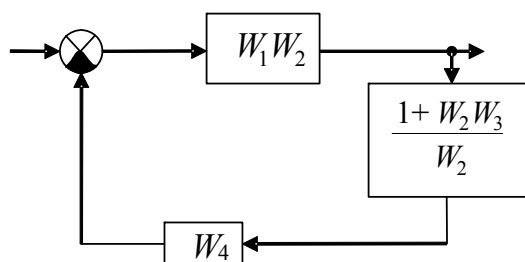


Рис. 4.9. Эквивалентная схема с обратной связью

Окончательно получаем:

$$W_{\text{экв}} = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 \frac{W_4 (1 + W_2 W_3)}{W_2}} = \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_4 + W_1 W_2 W_3 W_4}.$$

Пример 4.2. Определим эквивалентную передаточную функцию системы, изображенную на рис. 4.7, методом составления системы уравнений, соответствующей направлениям прохождения сигнала.

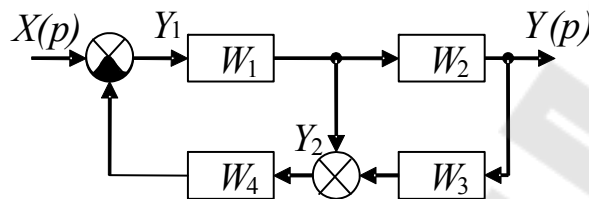


Рис. 4.10. Функциональная схема САУ с введенными переменными для примера 4.2

Составим систему уравнений, введя новые обозначения Y_1 и Y_2 (рис. 4.10):

$$\begin{cases} Y_1 = X - Y_2 \cdot W_4; \\ Y_2 = Y_1 \cdot W_1 + Y \cdot W_3; \\ Y = Y_1 \cdot W_1 \cdot W_2. \end{cases}$$

Всего получаем три уравнения с тремя неизвестными: Y_1 , Y_2 , Y . Далее решаем полученную систему. Выразим из третьего уравнения Y_1 :

$$Y_1 = \frac{Y}{W_1 \cdot W_2}$$

и подставим данное значение и значение Y_2 в первое уравнение:

$$\frac{Y}{W_1 \cdot W_2} = X - W_4 \left(\frac{Y}{W_1 \cdot W_2} \cdot W_1 + Y \cdot W_3 \right),$$

или

$$\frac{Y}{W_1 \cdot W_2} + \frac{Y \cdot W_4}{W_2} + Y \cdot W_3 \cdot W_4 = X.$$

Вынесем Y за скобки: $X = Y \left(\frac{1 + W_1 \cdot W_4 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \cdot W_4}{W_1 \cdot W_2} \right).$

Окончательно находим эквивалентную передаточную функцию в виде отношения $W(p) = \frac{Y}{X}$:

$$W(p) = \frac{Y}{X} = \frac{W_1 \cdot W_4}{1 + W_1 \cdot W_4 + W_1 \cdot W_2 \cdot W_4 \cdot W_3}.$$

Очевидно, что полученная формула идентична результату, полученному в предыдущем примере.

4.2. Задание на практическое занятие

4.2.1. Преобразовать структурную схему системы автоматического управления и получить эквивалентную передаточную функцию системы в общем виде:

- а) методом переноса узлов и сумматоров;
- б) методом составления системы уравнений, соответствующей направлениям прохождения сигнала.

Варианты индивидуальных заданий согласно номеру студента по журналу группы размещены на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно назначение индивидуальных заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Как определяется эквивалентная передаточная функция при последовательном соединении звеньев?
2. Как определяется эквивалентная передаточная функция при параллельном соединении звеньев?
3. Как определяется эквивалентная передаточная функция при соединении звеньев при помощи отрицательной (положительной) обратной связи?
4. По каким правилам осуществляется перенос сумматора?
5. По каким правилам осуществляется перенос узла?

ГЛАВА 5. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

5.1. Теоретические сведения

Частотными характеристиками называются формулы и графики, характеризующие реакцию звена на гармоническое входное воздействие в установившемся режиме, т. е. вынужденные синусоидальные колебания звена.

Если на вход линейного звена подать гармоническое воздействие вида $x(t) = X_0 \sin \omega t$, где X_0 – амплитуда; ω – угловая частота, имеющая размерность [рад/с] или [с⁻¹], то, как следует из необходимых и достаточных условий линейности, на выходе звена в установившемся режиме будет также гармоническая функция той же частоты, но в общем случае другой амплитуды Y_0 и сдвинутая по фазе относительно входной величины на угол φ : $y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

Связь между выходной гармоникой и входной устанавливается с помощью *частотной передаточной функции* звена $W(j\omega)$.

Частотная передаточная функция является важнейшей динамической характеристикой звена и представляет собой отношение изображений по Фурье выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях и равных нулю воздействиях на остальных входах:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}.$$

Из сравнения преобразований Фурье и Лапласа следует, что частотную передаточную функцию звена легко получить из его передаточной функции путем замены оператора p на $j\omega$, т. е.

$$W(j\omega) = W(p) \Big|_{p=j\omega}.$$

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$, как видно, представляет собой комплексное число, которое можно записать как в полярной, так и декартовой системах координат:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (5.1)$$

где $A(\omega)$ – модуль или амплитуда частотной передаточной функции, представляющий собой отношение амплитуды выходной величины к амплитуде входной, т. е. коэффициент усиления звена k на частоте ω :

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \text{mod } W(j\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} = k, \quad (5.2)$$

где $\varphi(\omega)$ – аргумент или фаза частотной передаточной функции, показывает фазовый сдвиг выходной гармоники по отношению к входной на частоте ω :

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega); \quad (5.3)$$

$U(\omega)$ – вещественная составляющая частотной передаточной функции:

$$U(\omega) = \text{Re } W(j\omega); \quad (5.4)$$

$V(\omega)$ – мнимая составляющая частотной передаточной функции:

$$V(\omega) = \text{Im } W(j\omega). \quad (5.5)$$

Соотношения $A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)}$ и $\varphi(\omega) = \text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$ связывают между собой составляющие частотной передаточной функции.

Таким образом, частотная передаточная функция, определяющая реакцию звена на гармонические колебания всех возможных частот, позволяет, пользуясь принципом суперпозиции, найти реакцию линейного звена на произвольное воздействие.

Выражение (5.1) представляет собой амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ) звена. Выражения (5.2) и (5.3) называются соответственно амплитудной частотной характеристикой звена и фазовой частотной характеристикой звена, а выражения (5.4) и (5.5) – вещественной частотной характеристикой и мнимой частотной характеристикой звена.

Для наглядного представления частотных свойств звена частотные характеристики отображают графически.

Для наглядного представления частотных свойств звена частотные характеристики отображают графически.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ). Строится на комплексной плоскости и представляет собой геометрическое место концов векторов (годографов), соответствующих частотной передаточной функции $W(j\omega)$ при изменении частоты от нуля до бесконечности (рис. 5.1). Для каждой частоты ω на комплексной плоскости наносится точка, полученные точки соединяются затем плавной кривой.

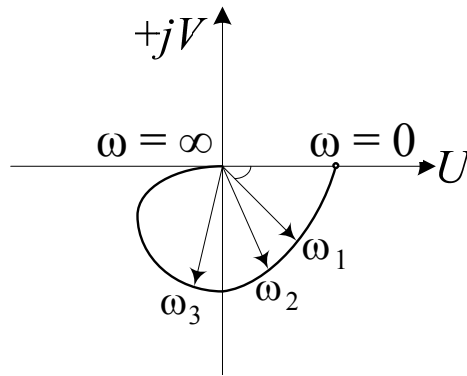


Рис. 5.1. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

Строить АФЧХ можно как в декартовых координатах (U, V), так и в полярных (A, φ).

Первый способ заключается в предварительном разделении частотной передаточной функции на действительную $U(\omega)$ и мнимую $jV(\omega)$ части и затем расчете координат точек АФЧХ при изменении частоты от 0 до ∞ и построении графика по этим точкам.

Второй способ заключается в расчете значений модуля $A(\omega)$ и аргумента $\varphi(\omega)$ при изменении частоты от 0 до ∞ . Затем график АФЧХ строится по значениям $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. При этом длина вектора, соединяющего начало координат с графиком, равна $A(\omega)$, а угол поворота между вектором и положительным направлением вещественной оси равен $\varphi(\omega)$. График АФЧХ называют *годографом* АФЧХ.

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ). Показывает, как пропускает звено сигнал различной частоты, иначе представляет собой коэффициент изменения амплитуды гармонических колебаний при прохождении через звено (рис. 5.2).

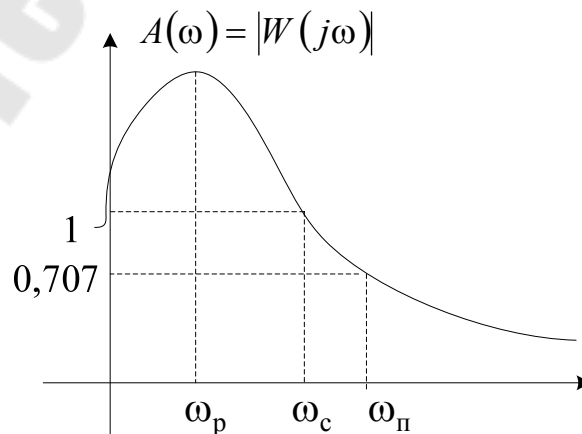


Рис. 5.2. Амплитудная частотная характеристика

На рис. 5.2 представлены: ω_p – резонансная частота, т. е. частота, на которой амплитудная частотная характеристика достигает максимума, иначе на этой частоте звено имеет максимальный коэффициент усиления; ω_c – частота среза, частота, на которой амплитудная частотная характеристика, уменьшаясь, принимает значение, равное единице, и при дальнейшем повышении частоты остается меньше единицы; ω_{Π} – частота пропускания, на которой амплитудная частотная характеристика, уменьшаясь, принимает значение, равное 0,707, и при дальнейшем повышении частоты не увеличивается; $\Delta\omega_{\Pi} = 2\omega_{\Pi}$ – полоса пропускания, диапазон частот гармонических колебаний, пропускаемых звеном без заметного ослабления.

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ). Показывает фазовые сдвиги, вносимые звеном на различных частотах (рис. 5.3).

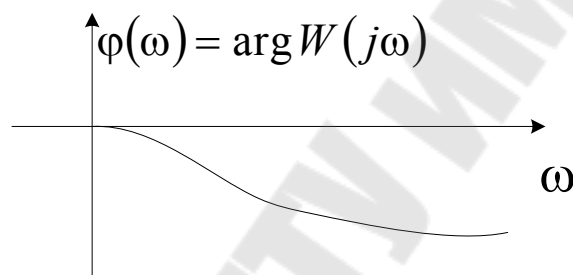


Рис. 5.3. Фазовая частотная характеристика

Вещественная частотная характеристика (ВЧХ). Представляет собой зависимость вещественной составляющей частотной передаточной функции от частоты.

Мнимая частотная характеристика (МЧХ). Представляет собой зависимость мнимой составляющей частотной передаточной функции от частоты.

Пример 5.1. Для системы с передаточной функцией $W(p) = \frac{5p+1}{4p^2+3p+1}$ построить частотные характеристики.

Построим годограф частотной передаточной функции (АФЧХ). Определим $W(j\omega)$ по передаточной функции $W(p)$ путем замены $p = j\omega$:

$$W(j\omega) = \frac{5j\omega + 1}{4(j\omega)^2 + 3j\omega + 1} = \frac{1 + 5j\omega}{1 - 4\omega^2 + 3j\omega}.$$

Освободимся от мнимости в знаменателе, умножив числитель и знаменатель на комплексно-сопряженное знаменателю выражение:

$$W(j\omega) = \frac{(1+5j\omega)(1-4\omega^2-3j\omega)}{(1-4\omega^2+3j\omega)(1-4\omega^2-3j\omega)} = \frac{1+11\omega^2+j(2\omega-20\omega^3)}{(1-4\omega^2)^2+9\omega^2}.$$

Представим частотную передаточную функцию в алгебраической форме:

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = \frac{1+11\omega^2}{(1-4\omega^2)^2+9\omega^2} + j \frac{2\omega(1-10\omega^2)}{(1-4\omega^2)^2+9\omega^2}.$$

$$\text{Тогда } U(\omega) = \frac{1+11\omega^2}{(1-4\omega^2)^2+9\omega^2}, \quad V(\omega) = \frac{2\omega(1-10\omega^2)}{(1-4\omega^2)^2+9\omega^2}.$$

Определим точки пересечения годографа с действительной осью:

$$V(\omega) = 0 \text{ или } \frac{2\omega(1-10\omega^2)}{(1-4\omega^2)^2+9\omega^2} = 0,$$

т. е.

$$\begin{cases} 2\omega(1-10\omega^2) = 0; \\ (1-4\omega^2)^2 + 9\omega^2 \neq 0. \end{cases}$$

При решении этого получаем: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0,316$ (отрицательные корни не рассматриваются).

Тогда $U(0) = 1$, $U(0,316) = 1,667$.

Определим точки пересечения годографа с мнимой осью:

$$U(\omega) = 0, \quad \frac{1+11\omega^2}{(1-4\omega^2)^2+9\omega^2} = 0,$$

т. е.

$$\begin{cases} 1+11\omega^2 = 0; \\ (1-4\omega^2)^2 + 9\omega^2 \neq 0, \end{cases}$$

откуда $\omega^2 = -\frac{1}{11}$, следовательно, годограф не пересекает мнимую ось,

так как нет положительных действительных корней.

Определим $U(\infty) = 0$, $V(\infty) = 0$. Рассчитаем дополнительные точки, сведем расчеты в табл. 5.1. Строим годограф (рис. 5.4).

Таблица 5.1

Исходные данные

$\omega, 1/c$	0	0,2	0,316	0,5	1	∞
$U(\omega)$	1	1,351	1,667	1,667	0,667	0
$V(\omega)$	0	0,225	0	-0,667	-1	0

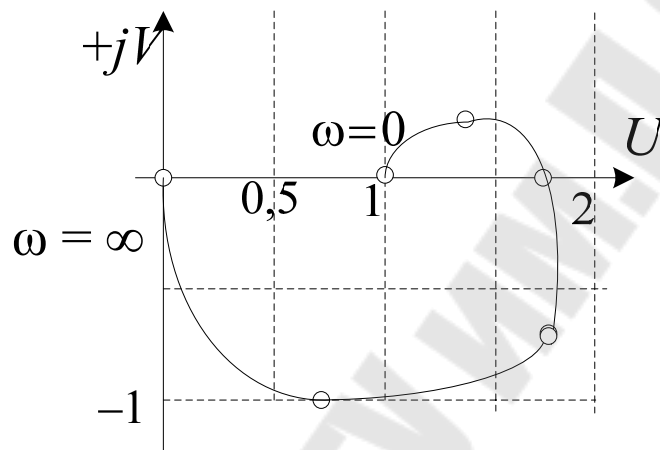


Рис. 5.4. АФЧХ к примеру 5.1

Для построения АЧХ и ФЧХ найдем модуль и аргумент полученной ранее частотной передаточной функции:

$$W(j\omega) = \frac{1 + 5j\omega}{1 - 4\omega^2 + 3j\omega}$$

Определим модуль как отношение модулей числителя и знаменателя:

$$W(\omega) = |W(j\omega)| = \frac{|1 + 5j\omega|}{|1 - 4\omega^2 + 3j\omega|} = \frac{\sqrt{1 + 25\omega^2}}{\sqrt{(1 - 4\omega^2)^2 + 9\omega^2}}$$

Найдем аргумент $W(j\omega)$:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg W(j\omega) = \arg(1 + j5\omega) - \arg(1 - 4\omega^2 + j3\omega) = \\ &= \operatorname{arctg}(5\omega) - \operatorname{arctg}\left(\frac{3\omega}{1 - 4\omega^2}\right). \end{aligned}$$

Определим $W(\omega)$ на частотах $\omega = 0$, $\omega = \infty$ и, рассчитав дополнительные точки, сведем расчеты в табл. 5.2.

Таблица 5.2

Исходные данные

$\omega, 1/c$	0	0,2	0,5	1	4	∞
$W(\omega)$	1	1,37	1,80	1,20	0,31	0

Построим график АЧХ (рис. 5.5).

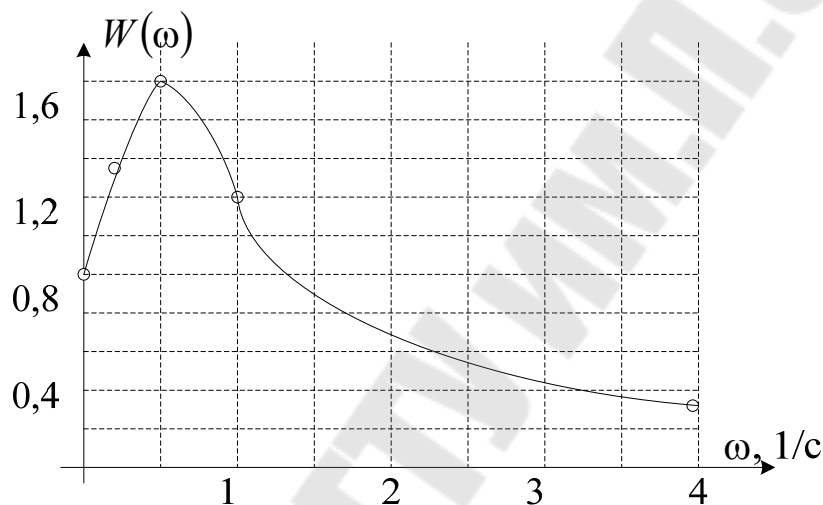


Рис. 5.5. График АЧХ к примеру 5.1

ФЧХ $\varphi(\omega)$ проще построить как сумму ординат фазовых характеристик $\varphi_1(\omega) = \text{arctg}(5\omega)$ и $\varphi_2(\omega) = -\text{arctg}\left(\frac{3\omega}{1-4\omega^2}\right)$, задавая для каждой из них характерные частоты (табл. 5.3).

Таблица 5.3

Исходные данные

$\omega, 1/c$	0	0,2	∞	$\omega, 1/c$	0	0,5	∞
$\varphi_1(\omega), ^\circ$	0	45	90	$\varphi_2(\omega), ^\circ$	0	-90	-180

График ФЧХ приведен на рис. 5.6.

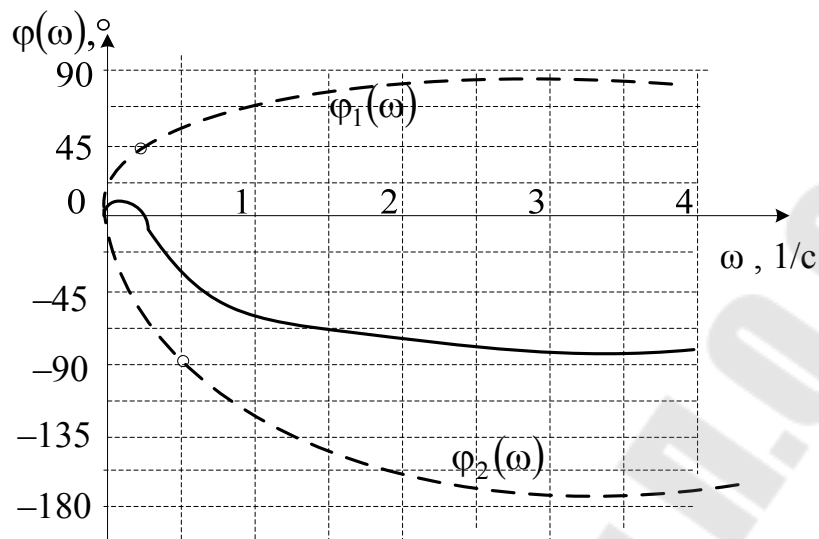


Рис. 5.6. График ФЧХ к примеру 5.1

5.2. Задание на практическое занятие

5.2.1. По заданным передаточным функциям определить частотные характеристики (АФЧХ, АЧХ и ФЧХ).

5.2.2. Построить графики полученных частотных функций.

Варианты индивидуальных заданий согласно номеру студента по журналу группы размещены на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно назначение индивидуальных заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение частотных характеристик.
2. Какова связь между АЧХ и передаточной функцией системы?
3. Какова связь между ФЧХ и передаточной функцией системы?
4. В каких координатах строится АФЧХ?
5. Что собой представляют МЧХ и ВЧХ?

ГЛАВА 6. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

6.1. Теоретические сведения

Очень часто графики АЧХ и ФЧХ строятся в логарифмическом масштабе в функции от $\lg \omega$. График АЧХ, построенный в логарифмическом масштабе, называют логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ), график ФЧХ, построенный в логарифмическом масштабе, – логарифмической фазочастотной характеристикой (ЛФЧХ). Характеристика ФЧХ $\varphi(\omega)$ не логарифмируется.

Перевод значений АЧХ в значения ЛАЧХ осуществляется следующим образом: $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$, дБ, т. е. единицей измерения амплитуды является децибел.

Единицей измерения $\lg \omega$ является декада, что соответствует увеличению частоты в 10 раз. На графике по оси $\lg \omega$ чаще всего записывают значения самой частоты ω . Поскольку $\lg 0 = -\infty$, точка для частоты $\omega = 0$ показывается условно (без соблюдения масштаба) или вообще не показывается.

На рис. 6.1 показан возможный вид ЛАЧХ взятого в качестве примера звена второго порядка. Сопрягающие частоты обозначены на рис. 6.1 как ω_{C1} и ω_{C2} .

Применение ЛАЧХ обусловлено возможностью их построения почти без расчетов в виде асимптот к действительным значениям ЛАЧХ, которые меняют свой наклон при частотах, называемых сопрягающими.

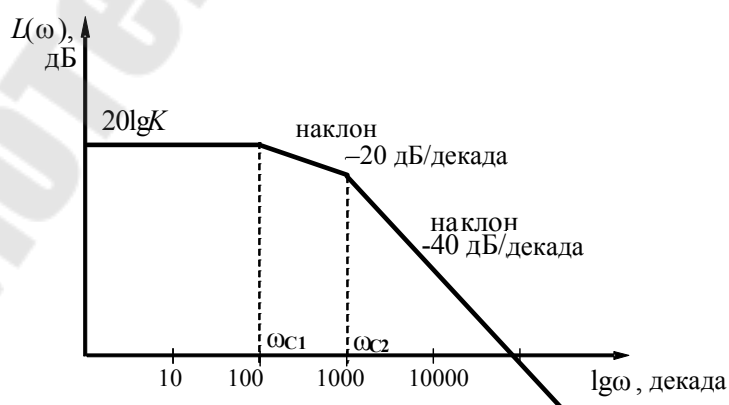


Рис. 6.1. Возможный вид ЛАЧХ звена второго порядка

Кроме того, построение общей ЛАЧХ цепи последовательно соединенных звеньев можно провести сложением ЛАЧХ отдельных звеньев на графике.

Определим порядок построения асимптотической логарифмической амплитудной частотной характеристики и фазовой частотной характеристики [7]:

1. Привести передаточную функцию (ПФ) $W(p)$ к следующему виду:

$$W(p) = \frac{p^r \prod_{r=1}^R (Tp_r + 1)^r}{p^v \prod_{v=1}^V (Tp_v + 1)^v},$$

где $r, v \in (0, 1, 2, 3 \dots)$.

Для этого разложить числитель и знаменатель ПФ на множители, найдя корни полиномов числителя и знаменателя. Если имеются множители вида $(a_i p^2 + b_i p + 1)$, для которых $b_i^2 - 4a_i < 0$, то они приближенно заменяются множителями типа $(\sqrt{a_i} p + 1)^2$.

2. По передаточной функции определить численное, в дБ, значение $20 \lg K$ и сопрягающие частоты $\omega_{C_i} = \frac{1}{T_i}$, которые расположить на оси частот в порядке возрастания. По горизонтальной оси откладываются значения $\lg \omega$ в декадах, по вертикальной – $20 \lg W(\omega)$, в дБ. Выбирается необходимый масштаб. При использовании логарифмического масштаба точка, соответствующая $\omega = 0$, находится слева в минус бесконечности, и ЛАЧХ строится не от нулевой частоты, а от достаточно малого, но конечного значения ω .

3. Первая низкочастотная асимптота проводится:

а) *горизонтально*, если ни в числителе, ни в знаменателе нет свободного множителя p , при $\omega \rightarrow 0$ (начальный отрезок характеристики) ЛАЧХ имеет наклон 0 дБ/декада на уровне $20 \lg K$;

б) *с наклоном* $+20 \cdot r$ дБ/декада, если числитель содержит свободный множитель p^r , $r \in (0, 1, 2, 3 \dots)$, проходя через точку с координатами $(\omega = 1; L(1) = 20 \lg K)$;

в) с наклоном $-20 \cdot \nu$ дБ/декада, если числитель содержит свободный множитель p^ν , $\nu \in (0, 1, 2, 3 \dots)$, проходя через точку с координатами $(\omega = 1; L(1) = 20 \lg K)$.

4. На каждой сопрягающей частоте наклон асимптотической ЛАЧХ изменяется по отношению к наклону предыдущей асимптоты таким образом:

- а) $+20 \cdot r$ дБ/декада, если числитель содержит множитель $(Tp + 1)^r$;
- б) $-20 \cdot \nu$ дБ/декада, если знаменатель содержит множитель $(Tp + 1)^\nu$.

5. График логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФЧХ) строится под графиком ЛАЧХ в таком же логарифмическом масштабе по оси частот. Построение графика ЛФЧХ производится по правилам построения ФЧХ.

Пример 6.1. Для системы с передаточной функцией $W(p) = \frac{5p + 1}{4p^2 + 3p + 1}$ построить асимптотические логарифмические частотные характеристики.

Для разложения на множители рассмотрим полином знаменателя: так как $3^2 - 4 \cdot 4 < 0$, принимаем $(4p^2 + 3p + 1) \approx (2p + 1)^2$.

Получаем передаточную функцию в виде: $W(p) = \frac{5p + 1}{(2p + 1)^2}$.

Вычислим значение $20 \lg K$ и сопрягающие частоты $\omega_{c_i} = \frac{1}{T_i}$:

$$20 \lg K = 20 \lg 1 = 0 \text{ дБ};$$

$$\omega_{c1} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{5} = 0,2 \frac{1}{\text{с}}, \quad \lg \omega_{c1} = \lg 0,2 = -0,7;$$

$$\omega_{c2} = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{2} = 0,5 \frac{1}{\text{с}}, \quad \lg \omega_{c2} = \lg 0,5 = -0,3.$$

Расчеты для построения ЛФЧХ сведем в табл. 6.1. Построим этот график под графиком ЛАЧХ в том же логарифмическом масштабе по оси частот.

Исходные данные

ω , 1/с	0	0,2	0,5	1	4	∞
$\lg \omega$, декада	$-\infty$	-0,7	-0,3	0	0,6	∞
$\varphi(\omega)$, градус	0	9,5	-21,8	-56,3	-82	-90

График асимптотической ЛАЧХ для данного примера изображен на рис. 6.2.

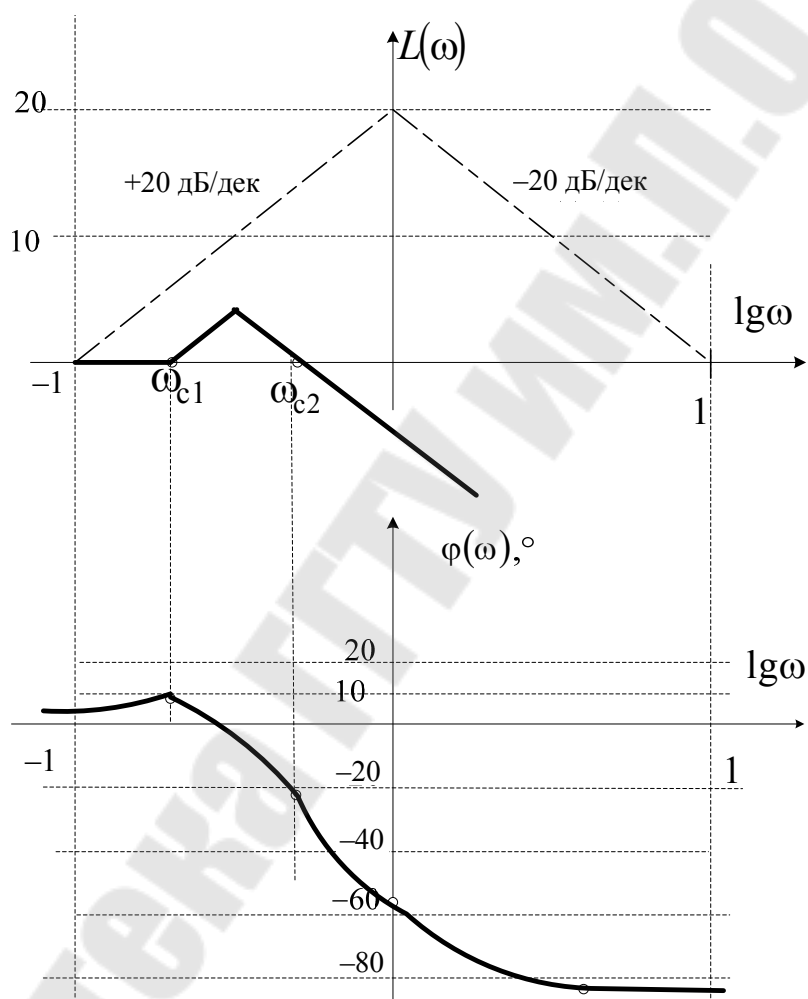


Рис. 6.2. Графики асимптотической ЛАЧХ и ЛФЧХ к примеру 6.1

Рассмотрим способы определения передаточной функции системы по ее асимптотической ЛАЧХ.

При нахождении аналитического значения передаточной функции $W(p)$ по виду ее ЛАЧХ числитель и знаменатель передаточной функции представляются в виде произведения простейших множителей, соответствующих элементарным типовым звеньям. Множители

могут быть следующего вида: K , $p^{\pm n}$, $(1 + pT)^{\pm n}$, где K – коэффициент усиления; p – оператор Лапласа; T – постоянная времени звена; n – произвольное целое число.

На рис. 6.3 приведено соответствие участков ЛАЧХ и аналитического значения передаточной функции звеньев.

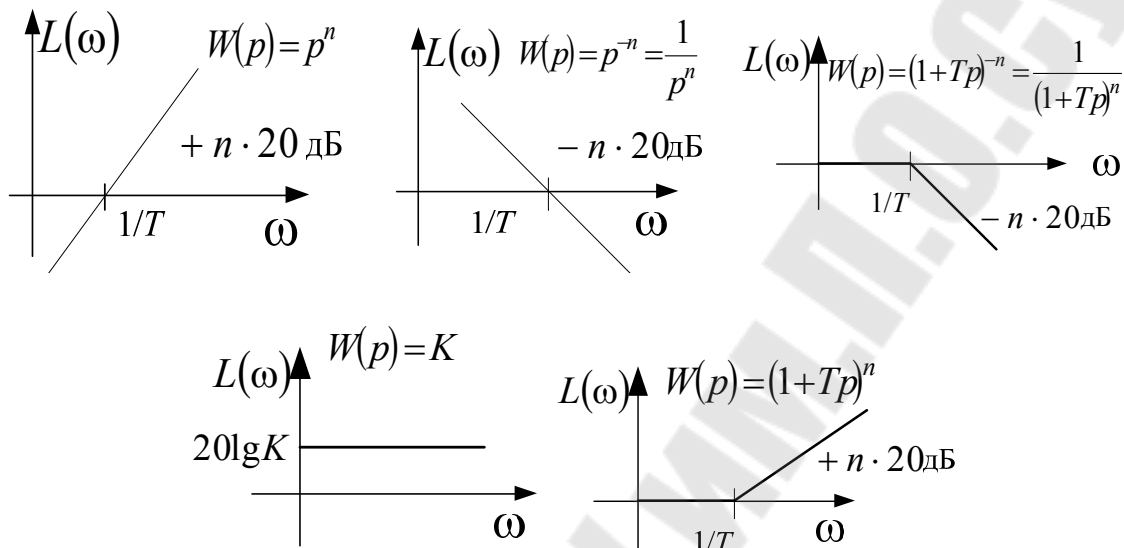


Рис. 6.3. Соответствие участков ЛАЧХ и аналитического значения передаточной функции звеньев

Пример 6.2. По представленной на рис. 6.4 асимптотической ЛАЧХ записать аналитическое значение передаточной функции системы.

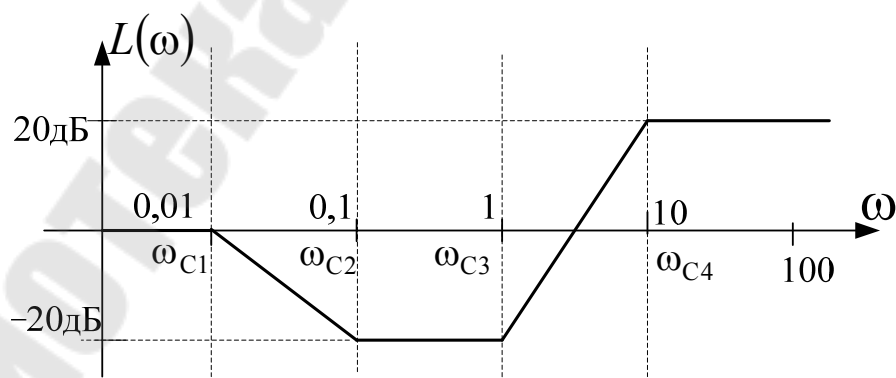


Рис. 6.4. Асимптотическая ЛАЧХ системы к примеру 6.2

Запишем множители передаточной функции в порядке возрастания частот сопряжения:

– до первой частоты сопряжения $\omega_{C1} = 0,01$ наклон ЛАЧХ равен 0 дБ, т. е. $K = 1$;

– на участке от ω_{C1} до ω_{C2} наклон изменяется на -20 дБ, что соответствует множителю $\frac{1}{(1+pT_1)}$, где постоянная времени определяется как $T_1 = \frac{1}{\omega_{C1}}$, т. е. $\frac{1}{(1+100p)}$;

– на участке от ω_{C2} до ω_{C3} наклон ЛАЧХ равен нулю; это означает изменение его на $+20$ дБ ($-20 + 20 = 0$), что соответствует множителю $(1+pT_2)$, где постоянная времени определяется как $T_2 = \frac{1}{\omega_{C2}}$, т. е. $(1+10p)$;

– на участке от ω_{C3} до ω_{C4} наклон ЛАЧХ изменяется от -20 дБ до $+20$ дБ, т. е. увеличивается на $+40$ дБ, что соответствует множителю $(1+pT_3)^2$, где постоянная времени определяется как $T_3 = \frac{1}{\omega_{C3}}$, т. е. $(1+p)^2$;

– на участке после частоты сопряжения ω_{C4} наклон ЛАЧХ уменьшается от $+40$ дБ до нуля, т. е. изменяется на -40 дБ ($0 = +40 - 40$), что соответствует множителю $\frac{1}{(1+pT_4)^2}$, где постоянная времени определяется как $T_4 = \frac{1}{\omega_4}$, т. е. $\frac{1}{(1+0,1p)^2}$.

Таким образом, полученная передаточная функция будет иметь вид:

$$W(p) = \frac{(1+10p)(1+p)^2}{(1+100p)(1+0,1p)^2}.$$

6.2. Задание на практическое занятие

6.2.1. Построить логарифмические линейно-аппроксимированные амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) и фазочастотную (ЛФЧХ) системы по заданным передаточным функциям.

6.2.2. По асимптотическим ЛАЧХ разомкнутой САУ определить аналитическое значение передаточной функции системы.

Варианты индивидуальных заданий согласно номеру студента по журналу группы размещены на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно назначение индивидуальных заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Какая частота называется частотой сопряжения?
2. Что такое декада?
3. В каких единицах откладывается масштаб в ЛАЧХ по оси частот?
4. Как построить асимптотическую ЛАЧХ?
5. Как определить аналитическое значение передаточной функции системы по ее асимптотической ЛАЧХ?
6. Какая частота называется частотой среза?
7. Чему равно значение $L(\omega) = 20 \lg A(\omega)$ на частоте среза?

ГЛАВА 7. АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

7.1. Теоретические сведения

Устойчивость – это свойство САУ возвращаться в состояния покоя или установившегося движения, из которого система была выведена на каком-либо воздействии, после устранения этого воздействия.

Исследование устойчивости САУ имеет огромное значение, так как САУ в замкнутом виде обычно склонны к неустойчивой работе. Устойчивость линейной системы определяется ее параметрами и не зависит от внешних воздействий.

Определение устойчивости САУ по полюсам ее передаточной функции (представленной в виде 7.1) называют *прямым методом оценки устойчивости*.

$$W(p) = \frac{B^m(p)}{A^n(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}. \quad (7.1)$$

Однако для оценки устойчивости линейной системы необязательно вычислять значения полюсов ее передаточной функции, т. е. решать алгебраическое уравнение системы n -го порядка.

Достаточно знать, все ли полюса находятся в левой полуплоскости комплексной плоскости p (являются «левыми»). Такой подход к определению устойчивости системы характерен для *косвенных методов оценки устойчивости (критериев устойчивости)*, позволяющих судить о расположении полюсов на плоскости комплексного переменного p без их расчета.

Различают алгебраические и частотные критерии устойчивости. Отличие критериев друг от друга связано с использованием различных характеристик САУ, но при этом все они предполагают проверку *необходимого и достаточного условия устойчивости*.

Независимо от выбранного критерия устойчивости первоначально проверяется выполнение *необходимого условия устойчивости*, согласно которому все коэффициенты характеристического полинома должны быть положительными, т. е.

$$H(p) = c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \dots + c_1 p + c_0. \quad (7.2)$$

Алгебраический критерий устойчивости Гурвица. По этому критерию условия устойчивости сводятся к выполнению ряда неравенств, связывающих коэффициенты уравнения системы. Пусть характеристический полином (знаменатель передаточной функции замкнутой САУ): описывается выражением (7.2).

Полагая $c_n > 0$ (выполняется необходимое условие устойчивости), определитель Гурвица составляется из коэффициентов характеристического $A(p)$ в виде:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \dots & \dots & 0 \\ c_n & c_{n-2} & c_{n-4} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & c_{n-1} & c_{n-3} & \dots & \dots & 0 \\ \dots & c_n & c_{n-2} & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & c_0 \end{vmatrix}.$$

Порядок составления матрицы Гурвица следующий. В левом верхнем углу матрицы записывается коэффициент c_{n-1} , по главной диагонали располагаются коэффициенты характеристического уравнения с младшими индексами, над элементами главной диагонали записываются коэффициенты с убывающими индексами, под элементами – с возрастающими.

Условия устойчивости заключаются в требовании положительности определителя Гурвица и всех его диагональных миноров. Из этого правила можно вывести более удобное для практического применения: САУ устойчива, если положительны все коэффициенты характеристического полинома и предпоследний диагональный минор определителя Гурвица (справедливо для систем не выше четвертого порядка).

Выведем выражение для расчета предпоследнего диагонального минора Δ_{n-1} систем третьего и четвертого порядков.

Для систем третьего порядка ($n = 3$) характеристический полином имеет вид: $H(p) = c_3 p^3 + c_2 p^2 + c_1 p + c_0$.

Тогда матрица Гурвица запишется как

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_2 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & c_0 \end{vmatrix},$$

а предпоследний диагональный минор:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} c_2 & c_0 \\ c_3 & c_1 \end{vmatrix} = c_1 c_2 - c_0 c_3.$$

Для систем четвертого порядка ($n = 4$):

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_3 & c_1 & 0 \\ c_4 & c_2 & c_0 \\ 0 & c_3 & c_1 \end{vmatrix} = c_3 c_1 c_2 - c_3^2 c_0 - c_1^2 c_4 = c_1 (c_2 c_3 - c_1 c_4) - c_0 c_3^2.$$

Частотный критерий Михайлова. Согласно этому критерию, для устойчивости системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова обошел в положительном направлении (против часовой стрелки) последовательно n квадрантов, нигде не обращаясь в ноль.

На рис. 7.1, *a* показаны кривые Михайлова устойчивой системы и неустойчивой, у которой нарушена последовательность обхода квадрантов комплексной плоскости.

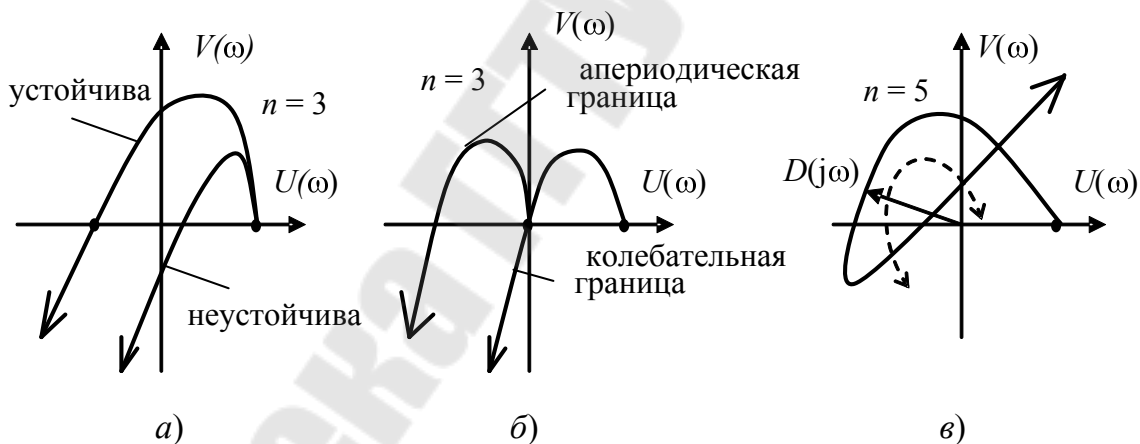


Рис. 7.1. Кривые Михайлова:

a – устойчивой и неустойчивой систем; *b* – систем на границе устойчивости; *в* – неустойчивой системы пятого порядка

Система находится на аперриодической границе устойчивости (рис. 7.1, *b*), если кривая при $\omega = 0$ начинается в начале координат, и на периодической границе устойчивости, если кривая при $\omega \neq 0$ проходит через начало координат. На рис. 7.1, *в* представлена кривая неустойчивой системы пятого порядка, причем неустойчивость объясняется фактом нарушения последовательность обхода квадрантов комплексной плоскости.

Пример 7.1. При помощи критерия Гурвица определить устойчивость замкнутой системы по заданной передаточной функции разомкнутой системы $W_{\text{раз}}(p) = \frac{K(1+T_1p)(1+T_2p)(1+T_3p)}{(1+T_4p)(1+T_5p)(1+T_6p)}$, если $K = 120$; $T_1 = 0,02$; $T_2 = 0,05$; $T_3 = 0$; $T_4 = 4$; $T_5 = 0,25$; $T_6 = 0,1$. Найти запасы устойчивости системы по параметру K – коэффициенту передачи.

Числитель и знаменатель передаточной функции $W_{\text{раз}}(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$ представим в виде полиномов, для этого раскроем скобки: $B(p) = K(Tp_1 + 1)(Tp_2 + 1)(Tp_3 + 1) = K(T_1T_2T_3p^3 + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)p^2 + (T_1 + T_2 + T_3)p + 1)$, отсюда получаем коэффициенты: $b_0 = K$, $b_1 = K(T_1 + T_2 + T_3)$, $b_2 = K(T_1T_2 + T_2T_1 + T_2T_3)$, $b_3 = KT_1T_2T_3$.

Аналогично определяем коэффициенты для знаменателя: $a_0 = 1$, $a_1 = T_4 + T_5 + T_6$, $a_2 = T_4T_5 + T_4T_6 + T_5T_6$, $a_3 = T_4T_5T_6$.

Подставив заданные значения коэффициента передачи и постоянных времени, получим:

$$b_0 = 120, \quad b_1 = 120(0,02 + 0,05 + 0) = 8,4;$$

$$b_2 = 120(0,02 \cdot 0,05 + 0 + 0) = 0,12, \quad b_3 = 0;$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 4 + 0,25 + 0,1 = 4,35, \quad a_2 = 1 + 0,4 + 0,025 = 1,425, \quad a_3 = 0,1.$$

Запишем передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(p) = \frac{0,12p^2 + 8,4p + 120}{0,1p^3 + 1,425p^2 + 4,35p + 1}.$$

Для исследования устойчивости системы, согласно критерию Гурвица, замкнем систему, для этого воспользуемся формулой для передаточной функции системы, замкнутой отрицательной обратной связью в виде:

$$W_{\text{зам}}(p) = \frac{W_{\text{раз}}(p)}{1 + W_{\text{раз}}(p)} = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)}.$$

Характеристический полином $H(p)$, по которому можно судить об устойчивости системы, соответствует знаменателю передаточной

функции замкнутой системы, его можно получить из передаточной функции разомкнутой системы путем сложения полиномов ее числителя и знаменателя. Таким образом, характеристический полином в нашем примере будет определяться следующим образом:

$$\begin{aligned} H(p) &= (a_3 + b_3)p^3 + (a_2 + b_2)p^2 + (a_1 + b_1)p + (a_0 + b_0) = \\ &= c_3p^3 + c_2p^2 + c_1p + c_0 = 0,1p^3 + 1,545p^2 + 12,75p + 121. \end{aligned}$$

Для устойчивости системы должно выполняться необходимое условие, согласно которому все коэффициенты характеристического полинома имеют одинаковый знак. Оно выполняется, все коэффициенты положительны. Заполним матрицу Гурвица, порядок которой совпадает с порядком системы (в данном случае третий):

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_2 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & c_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,545 & 121 & 0 \\ 0,1 & 12,75 & 0 \\ 0 & 1,545 & 121 \end{vmatrix}.$$

Согласно критерию Гурвица, нужно, чтобы все главные миноры (определители) матрицы были положительны:

- Первый минор: $\Delta_1 = c_2 = 1,545 > 0$.
- Второй минор: $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1,545 & 121 \\ 0,1 & 12,75 \end{vmatrix} = 19,69 - 12,1 = 7,59 > 0$.
- Третий минор: $\Delta_3 = c_0\Delta_2 = 919,45 > 0$.

Таким образом, все определители положительны, следовательно, система устойчива.

Определим запасы устойчивости системы относительно заданного параметра – коэффициента передачи. Для этого при вычислении коэффициентов характеристического уравнения требуется не подставлять численное значение того параметра, по которому необходимо найти запас, в данном примере – это значение K .

В этом случае коэффициенты полинома знаменателя разомкнутой передаточной функции $A(p)$ не изменятся, а полинома числителя $B(p)$ примут вид: $b_0 = K$, $b_1 = 0,07K$, $b_2 = 0,001K$, $b_3 = 0$.

Тогда характеристический полином примет вид:

$$H(p) = 0,1p^3 + (0,001K + 1,425)p^2 + (0,07K + 4,35)p + (K + 1).$$

Заполним матрицу Гурвица:

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_2 & c_0 & 0 \\ c_3 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & c_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0,001K + 1,425 & K + 1 & 0 \\ 0,1 & 0,07K + 4,35 & 0 \\ 0 & 0,001K + 1,425 & K + 1 \end{vmatrix}.$$

Из главных определителей матрицы определяем границы коэффициента передачи:

– из первого минора – $\Delta_1 = c_2 = 0,001K + 1,425 > 0$, т. е. $K > -1425$;

– из второго минора – $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0,001K + 1,425 & K + 1 \\ 0,1 & 0,07K + 4,35 \end{vmatrix} = 0,00007K^2 + 0,435K + 6,09875 > 0$; что справедливо при любом положительном значении K ;

– из третьего минора – $\Delta_3 = c_0\Delta_2 = (K + 1)\Delta_2 > 0$, что также справедливо при любом положительном значении K .

Следовательно, система устойчива, запас устойчивости по коэффициенту передачи K бесконечен: $(0, \infty)$.

Пример 7.2. Определить устойчивость замкнутой системы из примера 7.1 с использованием критерия Михайлова. Определим запасы устойчивости системы относительно заданного параметра – коэффициента передачи, пользуясь тем же критерием.

Подставим в выражение характеристического полинома вместо p комплексную переменную $j\omega$:

$$\begin{aligned} H(p) &= 0,1p^3 + 1,545p^2 + 12,75p + 121 = \\ &= -j0,1\omega^3 - 1,545\omega^2 + j12,75\omega + 121 = 121 - 1,545\omega^2 + j(-0,1\omega^3 + 12,75\omega). \end{aligned}$$

Годограф Михайлова построим примерно, определив координаты пересечения его с осями координат:

$$U(\omega) = \operatorname{Re}[H(j\omega)] = 121 - 1,545\omega^2;$$

$$V(\omega) = \operatorname{Im}[H(j\omega)] = -0,1\omega^3 + 12,75\omega.$$

С учетом того, что годограф Михайлова строится при изменении ω от 0 до $+\infty$, определим неотрицательные корни уравнения $V(\omega) = 0$: $-0,1\omega^3 + 12,75\omega = \omega(-0,1\omega^2 + 12,75) = 0$, откуда: $\omega_1 = 0$, $\omega_2 \approx 11,29$, и неотрицательные корни уравнения $U(\omega) = 0$: $\omega_3 \approx 8,85$.

Получаем координаты пересечения годографа Михайлова с осями координат (в порядке возрастания частоты):

- 1) $\omega_1 = 0$; $V = 0$; $U = 121$;
- 2) $\omega_3 \approx 8,85$; $U = 0$; $V(\omega_3) = 43,52$;
- 3) $\omega_2 \approx 11,29$; $V = 0$; $U = -75,93$.

Примерный вид годографа Михайлова для полученных данных показан на рис. 7.3. Исследуемая система устойчива.

Для определения запасов устойчивости по отношению к коэффициенту передачи будем рассматривать, насколько далеко от границы устойчивости находится система. Система находится на границе устойчивости, если годограф Михайлова проходит через начало координат при $\omega \neq 0$.

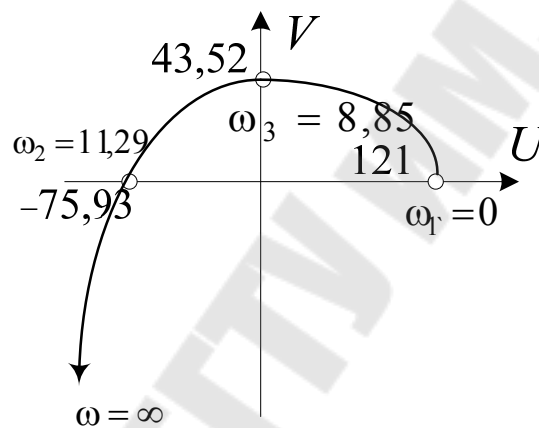


Рис. 7.3. Примерный вид годографа Михайлова для примера 7.2

Запишем характеристический полином системы, не подставляя численное значение коэффициента передачи K :

$$H(p) = 0,1p^3 + (0,001K + 1,425)p^2 + (0,07K + 4,35)p + (K + 1).$$

Подставим в выражение характеристического полинома вместо p комплексную переменную $j\omega$:

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 0,1(j\omega)^3 + (0,001K + 1,425)(j\omega)^2 + (0,07K + 4,35)(j\omega) + (K + 1) = \\ &= -j0,1\omega^3 - (0,001K + 1,425)\omega^2 + j(0,07K + 4,35)\omega + K + 1 = \\ &= -(0,001K + 1,425)\omega^2 + K + 1 + j(0,07K\omega + 4,35\omega - 0,1\omega^3). \end{aligned}$$

Условие нахождения САУ на границе устойчивости:

$$\begin{cases} U(\omega_0) = \operatorname{Re}[H(j\omega)] = -(0,001K + 1,425)\omega^2 + K + 1 = 0; \\ V(\omega_0) = \operatorname{Im}[H(j\omega)] = 0,07K\omega + 4,35\omega - 0,1\omega^3 = \omega(0,07K + 4,35 - 0,1\omega^2) = 0. \end{cases}$$

Для устойчивости системы третьего порядка необходимо, чтобы при равенстве нулю вещественной части характеристического полинома $U(\omega) = 0$ его мнимая часть была положительной $V(\omega) > 0$ (рис. 7.3).

Корень второго уравнения $\omega_0 = 0$ отбрасываем, так как для нахождения системы на границе устойчивости годограф Михайлова должен пройти через начало координат при $\omega \neq 0$.

Из первого уравнения выражаем частоту: $\omega_0^2 = \frac{K + 1}{0,001K + 1,435}$

и подставляем во второе: $0,07K + 4,35 - 0,1 \frac{K + 1}{0,001K + 1,435} > 0$.

Приведем к общему знаменателю, получим:
$$\frac{0,00007K^2 + 0,435K + 6,09875}{0,001K + 1,435} > 0.$$

Очевидно, что условие будет соблюдаться при любых неотрицательных значениях коэффициента передачи, причем числитель данного выражения полностью совпадает с условием, полученным при определении запаса устойчивости по критерию Гурвица.

7.2. Задание на практическое занятие

7.2.1. Исследовать устойчивость замкнутой системы при помощи критерия Гурвица по заданной передаточной функции разомкнутой системы согласно варианту.

7.2.2. Найти запасы устойчивости данной системы по заданному параметру.

7.2.3. Исследовать устойчивость замкнутой системы при помощи критерия Михайлова по заданной передаточной функции разомкнутой системы согласно варианту.

7.2.4. Найти запасы устойчивости данной системы по заданному параметру.

Варианты индивидуальных заданий согласно номеру студента по журналу группы размещены на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно назначение индивидуальных заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятию «устойчивость САУ».
2. Как оценить устойчивость САУ прямым методом оценки?
3. Какое условие является необходимым для устойчивости системы?
4. Дайте определение понятию «граница устойчивости».
5. Каковы условия нахождения системы на границе устойчивости согласно критерию Михайлова?
6. Что собой представляет годограф Михайлова?
7. Каковы условия нахождения системы на границе устойчивости согласно критерию Гурвица?
8. Для систем какого порядка необходимое условие является достаточным и почему?

ГЛАВА 8. АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

8.1. Теоретические сведения

В системе управления необходимо обеспечить требования не только по условиям устойчивости, но и по условиям качества процессов, в частности, точности, в установившихся и в переходных режимах ее работы.

Наиболее полной характеристикой качества системы в установившемся режиме является установившаяся ошибка. Когда внешние воздействия являются функциями времени, установившаяся ошибка как вынужденная составляющая ошибки также является функцией времени. Поэтому в общем случае установившуюся ошибку будем обозначать $e(t)$. Установившаяся ошибка определяется следующим образом:

$$e_{\text{уст}}(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t).$$

Значение ошибки, которое устанавливается в системе после подачи на ее вход типового задающего воздействия и затухания переходного процесса, является основным показателем качества, по которому оценивают и сравнивают системы управления. В качестве типового воздействия принято использовать следующие виды: ступенчатое, линейно изменяющееся, параболическое или синусоидальное.

Помимо статистических ошибок точность работы систем характеризуется динамическими и переходными ошибками.

Динамическая ошибка – ошибка в установившемся режиме работы системы при действии на нее нестационарного сигнала.

Переходная ошибка – ошибка при работе системы в переходном процессе, который возникает при отработке начального рассогласования.

Динамическая точность работы систем определяется при медленно изменяющихся входных сигналах (воздействия, число производных от которых ограничено).

Сигнал вида $x(t) = \sum_{i=0}^k a_i t^i$ относится к медленно изменяющемуся

воздействию, так как число производных от этого сигнала неравных нулю, равно k , а $(k+1)$ -я производная равна нулю. Гармонический сигнал не является медленно изменяющимся, так как число производных от него равно бесконечности.

Переходные процессы в САУ затухают значительно быстрее по сравнению с изменением медленно изменяющегося сигнала, поэтому и достигается установившейся динамический режим работы системы.

Наиболее полной характеристикой качества системы в установившемся режиме является установившаяся ошибка.

По определению передаточной функции по ошибке преобразование Лапласа для ошибки системы:

$$E(p) = W_e(p)X(p) = \left[C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_k p^k \right] X(p), \quad (8.1)$$

где $W_e(p)$ – передаточная функция системы по ошибке; $X(p)$ – изображение по Лапласу входного сигнала; C_i – коэффициенты установившейся ошибки.

Первое слагаемое в выражении (8.1) называют ошибкой по положению, а коэффициент C_0 – коэффициентом ошибки по положению (позиционной ошибки); второе слагаемое – ошибкой по скорости, а коэффициент C_1 – коэффициентом ошибки по скорости. Аналогично, третье слагаемое называют ошибкой по ускорению, а коэффициент C_2 – коэффициентом ошибки по ускорению.

В области действительной переменной это выражение имеет вид:

$$e(t) = C_0 x(t) + C_1 \frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \dots + \frac{1}{k!} C_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}. \quad (8.2)$$

Число слагаемых в последнем выражении ограничено, так как сигнал $x(t)$ является медленно изменяющимся воздействием.

Для нахождения неизвестных коэффициентов ошибки существуют три способа [3].

В первом случае используется формула дифференцирования передаточной функции по ошибке: $C_k = k! \frac{\partial^k}{\partial p^k} W_e(p) \Big|_{p=0}$.

Второй способ – коэффициенты ошибок находятся с помощью разложения передаточной функции замкнутой системы $W_{\text{зам}}(p)$ в ряд по степеням переменной p путем деления числителя передаточной функции ошибки на ее знаменатель.

Для реализации третьего способа представим передаточную функцию ошибки в виде:

$$W_e = \frac{b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0}.$$

Перемножив полином знаменателя на (8.1), получим:

$$\begin{aligned} (a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) \left(C_0 + C_1 p + \frac{1}{2} C_2 p^2 + \dots + \frac{1}{k!} C_k p^k \right) = \\ = b_n p^n + b_{n-1} p^{n-1} + \dots + b_1 p + b_0. \end{aligned}$$

Приравняв в данном выражении коэффициенты при одинаковых степенях p слева и справа, определяем формулы для последовательного вычисления коэффициентов ошибок:

$$C_0 = \frac{b_0}{a_0}; \quad C_1 = \frac{b_1 - a_1 C_0}{a_0}; \quad C_2 = \frac{2(b_2 - a_2 C_0 - a_1 C_1)}{a_0}.$$

В инженерных расчетах коэффициенты ошибок удобнее рассчитывать через коэффициенты передаточной функции *разомкнутой* системы, представленной в виде:

$$W_{\text{раз}} = \frac{d_m p^m + \dots + d_2 p^2 + b_1 p + b_0}{b_n p^n + \dots + b_2 p^2 + b_1 p + b_0} \frac{K}{p^v},$$

где v – порядок астатизма системы.

В астатических системах v первых коэффициентов ошибок равны нулю, где v – порядок астатизма системы.

При анализе качества работы систем помимо вычисления ошибок при медленно изменяющихся сигналах приходится оценивать точность и при гармонических воздействиях. В этом случае нельзя применять метод коэффициентов ошибок, так как число производных от гармонического сигнала не ограничено. При этом для расчета ошибок необходимо использовать частотные характеристики. По амплитудно-частотной характеристике ошибки вычисляется амплитуда колебаний ошибки, по фазочастотной характеристике – сдвиг колебаний ошибки относительно входного сигнала.

Пример 8.1. Найти динамическую ошибку при входном сигнале $x(t) = \alpha_1(t) + \frac{1}{2}\alpha_2 t^2$ следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии определяется выражением:

$$W_p(p) = \frac{K}{p} \frac{1 + pT_2}{(1 + pT_1)(1 + pT_3)}.$$

Преобразуем знаменатель передаточной функции:

$$W_p(p) = \frac{K}{p} \frac{1 + pT_2}{1 + p(T_1 + T_3) + p^2 T_1 T_3}.$$

Так как порядок астатизма $\nu = 1$, то коэффициенты ошибок определяются в виде:

$$C_0 = 0, \quad C_1 = \frac{1}{K}, \quad C_2 = 2 \left[\frac{T_1 + T_3 - T_2}{K} - \frac{1}{K^2} \right].$$

Подставив эти значения и значения производных от входного сигнала $\frac{dx(t)}{dt} = \alpha_1 + \alpha_2 t$ и $\frac{dx^2(t)}{dt^2} = \alpha_2$ в выражение (8. 2), получаем:

$$\begin{aligned} e(t) &= \frac{1}{K} (\alpha_1 + \alpha_2 t) + \frac{1}{2} \cdot 2 \left[\frac{T_1 + T_3 - T_2}{K} - \frac{1}{K^2} \right] \alpha_2 = \\ &= \frac{1}{K} (\alpha_1 + \alpha_2 t) + \frac{1}{K} \left(T_1 + T_3 - T_2 - \frac{1}{K} \right) \alpha_2. \end{aligned}$$

Таким образом, очевидно, что при увеличении коэффициента усиления системы и введении форсирующего звена ошибка уменьшается, увеличение же постоянных времени инерционных звеньев ухудшает динамическую ошибку системы.

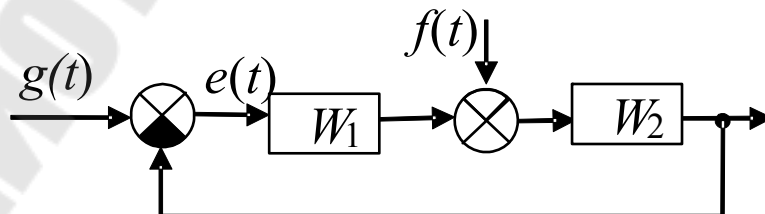


Рис. 8.1. САУ с двумя внешними воздействиями

Если на систему действуют два внешних воздействия (рис. 8.1) – задающее воздействие $g(t)$ и возмущение $f(t)$, установившуюся ошибку $e(t)$ можно представить в виде суммы:

$$e(t) = e_g(t) + e_f(t),$$

где $e_g(t)$ и $e_f(t)$ – установившиеся ошибки от задающего воздействия $g(t)$ и возмущения $f(t)$; соответственно определяются в виде:

$$e_g(t) = C_{0g}g(t) + C_{1g} \frac{dg(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_{2g} \frac{d^2g(t)}{dt^2} + \dots + \frac{1}{k!} C_{kg} \frac{d^k g(t)}{dt^k},$$

$$e_f(t) = C_{0f}f(t) + C_{1f} \frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{2} C_{2f} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \dots$$

Причем $C_{0g} = W_{eg}(0)$, $C_{ig} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial p^i} W_{eg}(p) \Big|_{p=0}$, $i = 1, 2, \dots$;

$$C_{0f} = W_{ef}(0), \quad C_{if} = \frac{1}{i!} \frac{\partial^i}{\partial p^i} W_{ef}(p) \Big|_{p=0}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $W_{eg}(p)$ – передаточная функция по ошибке относительно входа $g(t)$ и выхода $e(t)$, а $W_{ef}(p)$ – передаточная функция по ошибке относительно входа $f(t)$ и выхода $e(t)$.

Если система обладает астатизмом ν -го порядка, то коэффициенты ошибок C_{ig} и C_{if} при $i = 1, 2, \dots$ можно определить следующим

образом: $C_{ig} = \frac{W_{eg}(p)}{p^i} \Big|_{p=0}$ и $C_{if} = \frac{W_{ef}(p)}{p^i} \Big|_{p=0}$.

Пример 8.2. Для схемы САР, изображенной на рис. 8.1, определить значение установившейся ошибки $e_{уст}(t)$, учитывая установившиеся ошибки по задающему и возмущающему воздействиям, если $W_1 = 0,5$, $W_2 = \frac{4}{p(p+1)}$, $g(t) = 1 + 0,1t$ и $f(t) = 0,2$.

Так как все производные от $f(t)$ и производные 2-го порядка и выше от $g(t)$ равны нулю, то формулы для определения ошибки принимают вид:

$$e_g(t) = C_{0g}g(t) + C_{1g} \frac{dg(t)}{dt} \quad \text{и} \quad e_f(t) = C_{0f}f(t).$$

Поэтому для определения искомой ошибки достаточно вычислить коэффициенты ошибок C_{0g} , C_{1g} , C_{0f} .

Передаточные функции ошибки определяются в виде:

$$W_{eg}(p) = \frac{1}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{p(p+1)}{p(p+1)+2};$$

$$W_{ef}(p) = \frac{-W_2(p)}{1 + W_1(p)W_2(p)} = \frac{-4}{p(p+1)+2}.$$

Отсюда $C_{0g} = W_{eg}(0) = 0$, $C_{0f} = W_{ef}(0) = -2$. Так как $C_{0g} = 0$, то коэффициент C_{1g} вычисляем следующим образом:

$$C_{1g} = \left. \frac{W_{eg}(p)}{p} \right|_{p=0} = \left. \frac{p+1}{p(p+1)+2} \right|_{p=0} = 0,5.$$

Определяем ошибку:

$$e_g(t) = 0,5 \cdot 0,1 = 0,05, \quad e_f(t) = -2 \cdot 0,2 = -0,4;$$

$$e(t) = e_g(t) + e_f(t) = 0,05 - 0,4 = -0,35.$$

8.2. Задание на практическое занятие

8.2.1. Для схемы САУ, изображенной на рис. 8.2, определить значение установившейся ошибки $e_{уст}(t)$, учитывая установившиеся ошибки по задающему и возмущающему воздействиям.

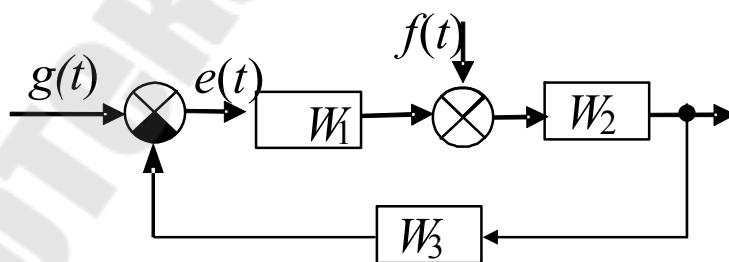


Рис. 8.2. САУ с двумя внешними воздействиями для практического занятия

Варианты индивидуальных заданий: задающее воздействие $g(t)$, возмущающее воздействие $f(t)$ и значения передаточных функций W_1 , W_2 и W_3 согласно номеру студента по журналу группы размещены

на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно назначение индивидуальных заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. По каким параметрам оценивается точность САУ?
2. Как определяется установившаяся динамическая ошибка?
3. Какие существуют способы нахождения неизвестных коэффициентов ошибки?
4. В каком случае при анализе точности системы нельзя применять метод коэффициентов ошибок?
5. Как называют три первых коэффициента установившейся динамической ошибки?

ГЛАВА 9. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТЫХ И ЗАМКНУТЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

9.1. Теоретические сведения

Наряду с непрерывными системами автоматического управления (САУ) широкое применение находят системы, в которых имеет место дискретный способ передачи и преобразования дискретных сигналов.

В импульсных системах в результате квантования по времени непрерывного сигнала $x(t)$ формируется последовательность его дискретных значений (*дискрет*), соответствующих фиксированным моментам времени. Обычно эти моменты отстоят друг от друга на постоянную величину T_0 , называемую *интервалом квантования по времени*. При этом сформированную последовательность дискрет принято называть *решетчатой функцией* $x[nT_0]$ целочисленного аргумента. При заданном интервале квантования T_0 каждой функции $x(t)$ соответствует единственная решетчатая функция.

Очевидно, что для получения математического выражения, описывающего решетчатую функцию $x[nT_0]$, необходимо в выражении для $x(t)$ выполнить формальную замену непрерывного аргумента t на nT_0 . Например, непрерывной функции $x(t) = e^{-at} \sin \omega t$ будет соответствовать решетчатая функция $x[nT_0] = e^{-anT_0} \sin \omega nT_0$.

Для решетчатой функции определены ее разности. Первая обратная разность равна:

$$\nabla x[nT_0] = x[nT_0] - x[(n-1)T_0], \quad (9.1)$$

а первая прямая разность определяется выражением вида:

$$\Delta x[nT_0] = x[(n+1)T_0] - x[nT_0].$$

Введем в рассмотрение прямую и обратную разности k -го порядка, которые определяются через разности $(k-1)$ -го порядка по формулам:

$$\begin{aligned} \Delta^k x[nT_0] &= \Delta^{k-1} x[(n+1)T_0] - \Delta^{k-1} x[nT_0]; \\ \nabla^k x[nT_0] &= \nabla^{k-1} x[nT_0] - \nabla^{k-1} x[(n-1)T_0]. \end{aligned}$$

При управлении системой в реальном масштабе времени величина дискретности $x[(n+1)T_0]$ не может быть определена в текущий момент времени $t = nT_0$, поэтому технически реализуется только обратная разность. Разности решетчатых функций являются аналогами производных для непрерывных функций времени.

Операцией, обратной операции взятия разности, является суммирование решетчатой функции, в результате которого получаем новую решетчатую функцию: $G[nT_0] = \sum_{i=1}^n x[iT_0]$. Суммы решетчатых функций

являются аналогами интегралов для непрерывных функций времени.

Уравнение вида $F\{x[nT_0], \nabla x[nT_0], \dots, \nabla^k x[nT_0]\} = x_{\text{вх}}[nT_0]$, в левой части которого записана комбинация решетчатых функций и ее разностей, называется разностным уравнением. Поскольку разность любого порядка может быть выражена в виде линейной комбинации значений решетчатой функции в различные моменты времени, для записи разностного уравнения используется следующая форма:

$$F\{x[nT_0], x[(n-1)T_0], x[(n-k)T_0]\} = x_{\text{вх}}[nT_0]. \quad (9.2)$$

Любое разностное уравнение может быть разрешено относительно значения решетчатой функции от наибольшего аргумента:

$$x[nT_0] = F\{x[(n-1)T_0], x[(n-2)T_0], \dots, x[(n-k)T_0], x_{\text{вх}}[nT_0]\}. \quad (9.3)$$

Очевидно, что (9.3) определяет рекуррентную процедуру численного решения разностного уравнения при известных начальных условиях $x[0], x[T_0], \dots, x[(n-1)T_0]$.

Если комбинация решетчатых функций в (9.2) является линейной, то динамика дискретной системы описывается линейным разностным уравнением k -го порядка [4]:

$$a_k x[nT_0] + a_{k-1} x[(n-1)T_0] + \dots + a_0 x[(n-k)T_0] = x_{\text{вх}}[nT_0], \quad (9.4)$$

в котором $a_k, a_{k-1}, \dots, a_1, a_0$ – постоянные числа, если система стационарна, а $x_{\text{вх}}[nT_0]$ – известная решетчатая функция, описывающая входное воздействие. Общее решение уравнения (9.4) представляет собой сумму общего решения однородного уравнения $x_{\text{св}}[nT_0]$, полученного из (9.4) при $x_{\text{вх}}[nT_0] = 0$, и частного уравнения $x_{\text{вын}}[nT_0]$, определяемого известной функцией $x_{\text{вх}}[nT_0]$:

$$x[nT_0] = x_{\text{св}}[nT_0] + x_{\text{вын}}[nT_0]. \quad (9.5)$$

Первое слагаемое в (9.5), описывающее свободную составляющую движения системы, может быть представлено в виде:

$$x_{\text{св}}[nT_0] = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n + \dots + C_k \lambda_k^n,$$

где $\lambda_k, \lambda_{k-1}, \dots, \lambda_1, \lambda_0$ – простые корни характеристического уравнения: $a_k \lambda^k + a_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0$, а $C_k, C_{k-1}, \dots, C_1, C_0$ – коэффициенты, зависящие от начальных условий.

Пример 9.1. Произвести моделирование дискретной системы на основе непрерывной системы путем замены дифференциального уравнения разностным с периодом квантования $T_0 = 0,1$ с. Определить свободную составляющую решетчатой функции движения такой системы $y_{\text{св}}[nT_0]$, если непрерывная система описывается дифференциальным уравнением:

$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 5 \frac{dy(t)}{dt} + 6y(t) = u(t)$, где $u(t)$ – входной сигнал, а $y(0) = 1$ и $\frac{dy(t)}{dt} = 0,5$.

Выполним с шагом квантования $T_0 = 0,1$ разностную дискретизацию уравнения:

$$100(y[n+2] - 2y[n+1] + y[n]) + 50(y[n+1] - y[n]) + 6y[n] = u[n].$$

После преобразований получим искомую дискретную модель в рекуррентном виде:

$$y[n+2] - 1,5y[n+1] + 0,56y[n] = 0,01u[n].$$

Характеристическое уравнение системы: $\lambda^2 - 1,5\lambda + 0,56 = 0$.
Корни уравнения: $\lambda_1 = 0,7$ и $\lambda_2 = 0,8$. Соответственно собственное движение модели: $y_{\text{св}}[n] = C_0 \cdot 0,7^n + C_1 \cdot 0,8^n$.

Постоянные C_0, C_1 найдем, используя координаты начального состояния системы: $y(0) = C_0 + C_1 = 1$ и $y[1] = C_0 \cdot 0,7 + C_1 \cdot 0,8$.

Значение $y[1]$ определим, используя первую разность:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 10(y[1] - y[0]) = 0,5, \text{ откуда } y[1] = 1,05.$$

Следовательно, $C_0 = 3,5, C_1 = -2,5$ и $y_{\text{св}}[n] = 3,5 \cdot 0,7^n - 2,5 \cdot 0,8^n$.

Определяющим признаком, отличающим непрерывную систему от дискретной, является наличие в последней импульсного элемента (ИЭ), который выполняет следующие две операции: квантует по времени сигнал и формирует на выходе последовательность модулированных импульсов определенной формы.

При анализе ИЭ заменяется последовательно соединенным идеализированным элементом, генерирующим модулированные δ -функции (идеальным импульсным элементом – ИИЭ или квантователем), и экстраполятором или формирующим элементом (ФЭ), преобразующим последовательность δ -функций в последовательность импульсов заданной формы.

Таким образом, импульсная система может быть приведена к соединению ИИЭ и непрерывных звеньев, как это показано на рис. 9.1.

При таком представлении используют понятие приведенной непрерывной части (ПНЧ), состоящей из собственно непрерывной части, последовательно соединенной с формирующим элементом ФЭ.

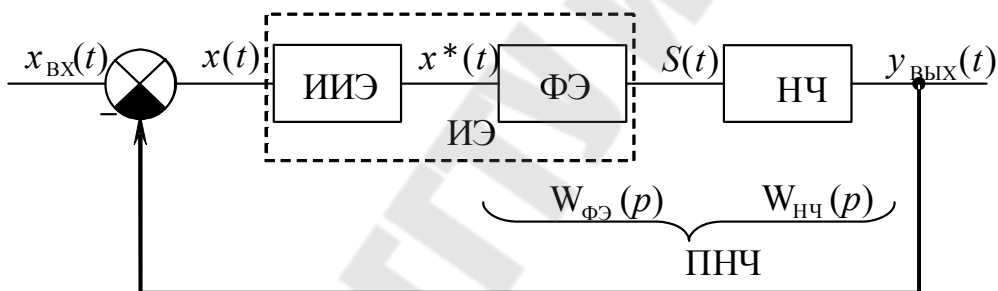


Рис. 9.1. Детализированная структурная схема импульсной системы

Передаточная функция ПНЧ определяется выражением:

$$W(p) = W_{\text{ФЭ}}(p) W_{\text{НЧ}}(p).$$

Приведенная непрерывная часть также может исчерпывающим образом характеризоваться своей весовой функцией: $w(t) = L^{-1}[W(p)]$.

Выходной сигнал ИИЭ определится в виде:

$$x^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_0] \delta(t - nT_0). \quad (9.6)$$

Обозначим функцию времени, описывающую импульсы на выходе ФЭ, как $S(t)$. Считая сигнал $S(t)$ импульсом прямоугольной формы скважностью $\gamma = 1$, его можно представить в виде разности

несмещенной $1(t)$ и запаздывающей на один такт квантования $1(t - T_0)$ единичных ступенчатых функций:

$$S(t) = 1(t) - 1(t - T_0).$$

Тогда, учитывая, что выходной сигнал ФЭ представляет собой реакцию на δ -функцию, т. е. является функцией веса ФЭ, можно записать:

$$W_{\text{ФЭ}}(p) = L\{S(t)\} = S(p),$$

где $L\{\dots\}$ – оператор преобразования Лапласа; $S(p)$ – изображение сигнала $S(t)$.

Таким образом:

$$\begin{aligned} W_{\text{ФЭ}}(p) &= L\{1(t) - 1(t - T_0)\} = L\{1(t)\} - L\{1(t - T_0)\} = \\ &= \frac{1}{p} - \frac{1}{p} e^{-T_0 p} = \frac{1 - e^{-T_0 p}}{p}. \end{aligned}$$

Формирующий элемент с данной передаточной функцией называют *экстраполятором нулевого порядка*.

Выходной сигнал ПНЧ, на вход которой поступают модулированные δ -функции, представляет собой *непрерывный сигнал*, равный сумме смещенных функций веса ПНЧ:

$$y_{\text{ВЫХ}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_{\text{ВХ}}[nT_0] w_{\text{ПНЧ}}(t - nT_0). \quad (9.7)$$

Уравнение (9.7) представляет собой уравнение импульсной системы во временной области, позволяющее определить выходной сигнал системы при известном входном воздействии.

С учетом (9.6) можно определить изображение по Лапласу входной величины ПИЭ:

$$\begin{aligned} x^*(p) &= L\{x^*(t)\} = L\left\{\sum_{n=0}^{\infty} x[nT_0] \delta(t - nT_0)\right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_0] \int_0^{\infty} \delta(t - nT_0) e^{-pt} dt. \end{aligned}$$

Поскольку $\delta(t - nT_0) = 0$ при всех t , отличных от nT_0 , окончательно имеем:

$$x^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_0] e^{-pnT_0} = D\{x[nT_0]\}, \quad (9.8)$$

где $D\{\dots\}$ – символ *дискретного преобразования Лапласа* или *D-преобразования*. Следовательно, непрерывное преобразование Лапласа (*L-преобразование*) модулированной последовательности δ -функций равно дискретному преобразованию Лапласа (*D-преобразованию*) соответствующей решетчатой функции:

$$x^*(p) = L\{x^*(t)\} = D\{x^*[nT_0]\}.$$

Если в (9.8) e^{pT_0} заменить на z , то получим формулу так называемого *Z-преобразования* для дискретных значений сигнала:

$$\begin{aligned} x(z) &= Z\{x[nT_0]\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x[nT_0] z^{-n} = x(0) + x(T_0)z^{-1} + x(2T_0)z^{-2} + \dots, \end{aligned} \quad (9.9)$$

где комплексные переменные p и z связаны между собой следующим образом:

$$z = e^{pT_0} \text{ и } p = \frac{1}{T_0} \ln z. \quad (9.10)$$

По аналогии с непрерывными системами введем в рассмотрение передаточную функцию разомкнутой дискретной системы $W(z)$ (рис. 9.7) как отношение *Z-изображений* выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях:

$$W(z) = \frac{y_{\text{ВЫХ}}(z)}{x_{\text{ВХ}}(z)}, \quad (9.11)$$

где $y(z) = Z\{y_{\text{ВЫХ}}[nT_0]\}$, $x(z) = Z\{x_{\text{ВХ}}[nT_0]\}$.

В разомкнутой дискретной САУ сигналы $x_{\text{ВХ}}(t)$ и $y_{\text{ВЫХ}}(t)$ – непрерывные функции времени, а формула (9.11) определяет связь между ними, а между соответствующими решетчатыми функциями $x_{\text{ВХ}}[nT_0]$ и $y_{\text{ВЫХ}}[nT_0]$.

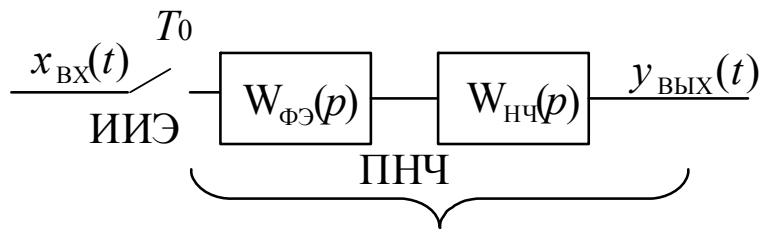


Рис. 9.2. К определению дискретной передаточной функции

Из выражения (9.7) следует, что Z -передаточная функция разомкнутой импульсной системы равна Z -преобразованию дискретной весовой функции ПНЧ $w_{\text{ПНЧ}}(nT_0)$, т. е.

$$W(z) = \sum_{n=0}^{\infty} w_{\text{ПНЧ}}[nT_0] z^{-n} = L \left\{ w_{\text{ПНЧ}}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT_0) \right\}. \quad (9.12)$$

Формула (9.12) используется при вычислении Z -передаточных функций разомкнутых импульсных систем.

Так как Z -преобразование обладает свойством линейности, то в случае, если $W(p)$ – дробно-рациональное выражение, вычисление Z -передаточных функций можно проводить следующим образом:

– передаточную функцию $W(p)$ разложить на простейшие дроби:

$$W(p) = W_1(p) + W_2(p) + \dots + W_n(p);$$

– для каждой простейшей дроби $W_i(p)$, $i = 1, 2, \dots, n$ с помощью таблицы найти Z -преобразование: $W_i(z) = Z\{W_i(p)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$;

– по теореме линейности Z -преобразования записать $W(z) = W_1(z) + W_2(z) + \dots + W_n(z)$ и провести необходимые преобразования.

Пример 9.2. Необходимо определить дискретную передаточную функцию разомкнутой системы $W(z)$ с периодом дискретизации T_0 , если передаточная функция приведенной непрерывной части определяется выражением $W_{\text{ПНЧ}}(p) = \frac{1}{p(p+1)}$.

Для этого следует выполнить преобразование:

$$W(z) = Z\{W_{\text{ПНЧ}}(p)\} = Z \left\{ L^{-1} [W_{\text{ПНЧ}}(p)] \Big|_{t = nT_0} \right\}.$$

Вычислим непрерывную функции веса ПНЧ, представив выражение для передаточной функции ПНЧ в виде суммы элементарных дробей:

$$w_{\text{ПНЧ}}(t) = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p(p+1)} \right\} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right\} = 1(t) - e^{-t}.$$

Соответствующая решетчатая весовая функция:

$$w_{\text{ПНЧ}}[nT_0] = w_{\text{ПНЧ}}(t) \Big|_{t=nT_0} = 1[nT_0] - e^{-nT_0}.$$

Взяв Z-преобразование от $w_{\text{ПНЧ}}[nT_0]$, получим:

$$\begin{aligned} W(z) &= Z\{w_{\text{ПНЧ}}[nT_0]\} = Z\{1[nT_0] - e^{-nT_0}\} = Z\{1[nT_0]\} - Z\{e^{-nT_0}\} = \\ &= \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T_0}} = \frac{z(1-e^{-T_0})}{(z-1)(z-e^{-T_0})}. \end{aligned}$$

Рассмотрим пример определения дискретной передаточной функции с учетом формирующего элемента.

Пример 9.3. Определить дискретную передаточную функцию разомкнутой системы $W(z)$ с периодом дискретизации T_0 , если передаточная функция непрерывной части системы имеет вид: $W_{\text{НЧ}}(p) = \frac{k}{p}$,

а в качестве ФЭ используется экстраполятор нулевого порядка.

Передаточная функция ПНЧ такой системы согласно равна:

$$W_{\text{ПНЧ}}(p) = \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} W_{\text{НЧ}}(p).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W(z) &= Z\{W_{\text{ПНЧ}}(p)\} = Z\left\{ \frac{1 - e^{-pT_0}}{p} W_{\text{НЧ}}(p) \right\} = Z\left\{ \frac{W_{\text{НЧ}}(p)}{p} \right\} - \\ &- Z\left\{ \frac{W_{\text{НЧ}}(p)e^{-pT_0}}{p} \right\} = Z\left\{ \frac{W_{\text{НЧ}}(p)}{p} \right\} - z^{-1} Z\left\{ \frac{W_{\text{НЧ}}(p)}{p} \right\} = \\ &= (1 - z^{-1}) Z\left\{ \frac{W_{\text{НЧ}}(p)}{p} \right\}. \end{aligned}$$

В случае для указанной – в условии настоящего примера имеем:

$$W(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{k}{p^2}\right\} = k \frac{z-1}{z} \frac{T_0 z}{(z-1)^2} = \frac{kT_0}{z-1}.$$

При определении передаточной функции замкнутой дискретной системы необходимо учитывать расположение квантователя в структурной схеме. Рассмотрим систему с квантованием сигнала ошибки (рис. 9.3).

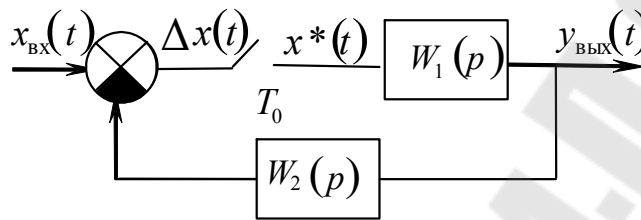


Рис. 9.3. Структура замкнутой дискретной САУ с квантованием сигнала ошибки

Так как звенья $W_1(p)$ и $W_2(p)$ не разделены квантователем, то по правилам преобразования структурных схем дискретных систем дискретная передаточная функция разомкнутой системы равна:

$$W_{\text{раз}}(z) = Z\{W_1(p)W_2(p)\} = W_{1,2}(z).$$

В общем случае произведение Z -передаточных функций не равно Z -преобразованию от произведения непрерывных передаточных функций: $W_1(z)W_2(z) \neq W_{1,2}(z)$.

Для данной структуры передаточная функция замкнутой системы $W_{\text{зам}}(z)$ и передаточная функция по ошибке $W_{\text{ош}}(z)$ определяются в виде:

$$W_{\text{зам}}(z) = \frac{y_{\text{ВЫХ}}(z)}{x_{\text{ВХ}}(z)} = \frac{W_{\text{пр}}(z)}{1 + W_{\text{раз}}(z)} = \frac{W_1(z)}{1 + W_{1,2}(z)}, \quad W_{\text{ош}}(z) = \frac{1}{1 + W_{1,2}(z)}.$$

Пример 9.4. Для системы с периодом дискретизации T_0 , структура которой приведена на рис. 9.3, определить передаточную функцию замкнутой САУ и передаточную функцию по ошибке, если

$$W_1(p) = \frac{K_1}{p} \quad \text{и} \quad W_2(p) = \frac{K_2}{p}.$$

Для системы, рассматриваемой в данном примере:

$$W_{\text{пр}}(z) = Z \left\{ \frac{K_1}{p} \right\} = \frac{K_1 z}{z-1}; \quad W_{\text{раз}}(z) = Z \left\{ \frac{K_1 K_2}{p} \right\} = \frac{K_1 K_2 T_0 z}{(z-1)^2}.$$

Следовательно, передаточная функция замкнутой САУ определится в виде:

$$W_{\text{зам}}(z) = \frac{\frac{K_1 z}{z-1}}{1 + \frac{K_1 K_2 T_0 z}{(z-1)^2}} = \frac{K_1 z(z-1)}{(z-1)^2 + K_1 K_2 T_0 z} = \frac{K_1 z(z-1)}{z^2 + (K_1 K_2 T_0 - 2)z + 1},$$

а передаточная функция по ошибке:

$$W_{\text{ош}}(z) = \frac{1}{1 + \frac{K_1 K_2 T_0 z}{(z-1)^2}} = \frac{(z-1)^2}{z^2 + (K_1 K_2 T_0 - 2)z + 1}.$$

Определив данные дискретные передаточные функции и зная Z -изображение входного сигнала, можно вычислить Z -изображение выходного сигнала $y_{\text{вых}}$ или сигнала ошибки Δx :

$$y_{\text{вых}}(z) = W_{\text{зам}}(z) x_{\text{вх}}(z) \quad \text{и} \quad \Delta x(z) = W_{\text{ош}}(z) x_{\text{вх}}(z).$$

По Z -изображениям сигналов системы могут быть найдены соответствующие решетчатые функции. Такая операция представляет собой обратное Z -преобразование, символическое обозначение которой – $Z^{-1}\{\dots\}$.

Не следует забывать, что получаемая в результате обратного Z -преобразования решетчатая функция $x[nT_0]$ определяет значения непрерывного сигнала $x(t)$ только в дискретные моменты времени $t = nT_0$. Поэтому для полного описания функции $x(t)$ необходимо использовать дополнительную информацию о поведении системы, либо применять методы, позволяющие вычислить величину $x(t)$ внутри интервалов квантования.

По изображению $x(z)$ произвольного вида значения $x[nT_0]$ могут быть вычислены путем разложения $x(z)$ в ряд Лорана (в ряд по убывающим степеням (z)):

$$x(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + c_4 z^{-4} + \dots \quad (9.13)$$

Сравнивая приведенный ряд с (9.4), получим:

$$x(0) = c_0; \quad x(T_0) = c_1; \quad x(2T_0) = c_2; \quad x(3T_0) = c_3$$

и т. д.

Поскольку для каждого изображения $x(z)$ в ряд (9.13) является единственным, оно может быть осуществлено любым способом, например, по формулам:

$$c_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z); \quad c_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2 \cdot x; \quad c_3 = \lim_{z \rightarrow \infty} z^2$$

и т. д.

Наиболее простым приемом нахождения коэффициентов ряда (9.6) в случае, когда $x(z)$ представлено в виде дробно-рациональной функции:

$$x(z) = \frac{A(z)}{B(z)} = \frac{a_l z^l + a_{l-1} z^{l-1} + \dots + a_1 z + a_0}{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_1 z + b_0}, \quad (9.14)$$

является деление числителя $A(z)$ выражения (9.14) на знаменатель $B(z)$.

Пример 9.5. Построить график решетчатой переходной функции $h[nT_0]$ системы с передаточной функцией приведенной непрерывной части: $W_{\text{ПНЧ}}(z) = \frac{1,5}{z + 0,5}$.

Переходная функция $h(t)$ – это реакция системы на единичный ступенчатый сигнал $1(t)$; для дискретных САУ решетчатая переходная функция $h[nT_0]$ – реакция приведенной непрерывной части системы на единичную решетчатую функцию $1[nT_0]$, Z-изображением которой является выражение $\frac{z}{z-1}$.

Тогда Z-изображение решетчатой переходной функции:

$$h(z) = W_{\text{ПНЧ}}(z) \frac{z}{z-1} = \frac{1,5z}{(z+0,5)(z-1)} = \frac{1,5z}{z^2 - 0,5z - 0,5}.$$

Результат деления полинома, стоящего в числителе $h(z)$, на полином в знаменателе, представлен на рис. 9.4.

$$\begin{array}{r|l}
 -1,5z & z^2 - 0,5z - 0,5 \\
 \hline
 1,5z - 0,75 - 0,75z^{-1} & 1,5z^{-1} + 0,75z^{-2} + 1,125z^{-3} + \dots \\
 - & 0,75 + 0,75z^{-1} \\
 \hline
 -0,75 - 0,375z^{-1} - 0,375z^{-2} & \\
 \hline
 -1,125z^{-1} + 0,375z^{-2} & \\
 \dots &
 \end{array}$$

Рис. 9.4. Результат деления полиномов

Коэффициенты полученного степенного ряда определяют следующие дискреты переходной решетчатой функции: $h[nT_0]$: $h(0) = 0$; $h(T_0) = 1,5$; $h(2T_0) = 0,75$; $h(3T_0) = 1,125$ и т. д. Полученная решетчатая переходная функция изображена на рис. 9.5.

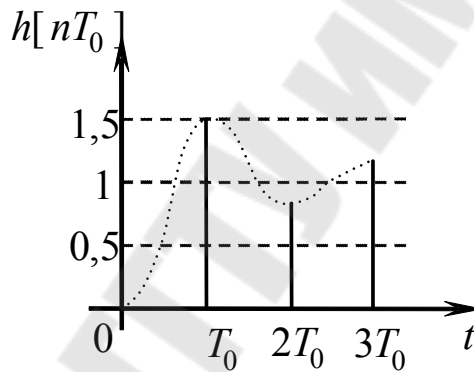


Рис. 9.5. Решетчатая переходная функция для примера 9.5

Использование любого из предложенных методов расчета дискрет решетчатой функции не ограничено какими-либо условиями к виду $x(z)$, но не дает возможности записать выражение для $x[nT_0]$ в виде компактной функции натурального аргумента n .

Такая функция может быть получена на основании формулы обратного z -преобразования (формулы обращения):

$$x[nT_0] = \frac{1}{2\pi f} \int_{\Gamma} x(z) z^{n-1} dz, \quad (9.15)$$

где замкнутый контур интегрирования Γ на плоскости Z охватывает особые точки $x(z)z^{n-1}$.

Вычисление интеграла (9.15) может быть осуществлено с использованием формулы Коши в полюсах $x(z)$:

$$x[nT_0] = \sum_{i=1}^K \text{Res } x(z)z^{n-1}. \quad (9.16)$$

Вычет в простом полюсе z_0 находится по формуле

$$\text{Res } x(z)z^{n-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)x(z)z^{n-1}], \quad (9.17)$$

а вычет в полюсе кратности S :

$$\text{Res } x(z)z^{n-1} = \frac{1}{(S-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{S-1}}{dz^{S-1}} [(z - z_0)^S x(z)z^{n-1}] \right\}. \quad (9.18)$$

Если полюса изображения (9.16) простые, $l < k$, а полином в числителе может быть представлен в виде $A(z) = z A_0(z)$, то (9.15) преобразуется к виду:

$$x[nT_0] = \sum_{i=1}^k \frac{A_0(z_i)}{B'(z_i)} z_i^n. \quad (9.19)$$

Пример 9.6. Определить выражение для решетчатой переходной функции $h[nT_0]$, если ее Z -изображение $h(z) = \frac{1,5z}{z^2 - 0,5z - 0,5}$.

Используя формулу (9.18), имеем: $A(z) = 1,5z$; $A_0(z) = 1,5$; $B(z) = z^2 - 0,5z - 0,5$; $B'(z) = 2z - 0,5$; $k = 2$; $z_1 = -0,5$; $z_2 = 1$. Тогда $x[nT_0] = \frac{1,5}{2(-0,5) - 0,5} (-0,5)^n + \frac{1,5}{2 \cdot 1 - 0,5} 1^n = 1 - (-0,5)^n$.

Рассчитанные по полученному выражению значения дискрет, как и следовало ожидать, совпадают с вычисленными в предыдущем примере.

Если все условия, ограничивающие применение (9.19), выполняются, за исключением того, что полином $A(z)$ не имеет нулевого корня, то искомая решетчатая функция определяется по формуле

$$x[nT_0] = \sum_{i=1}^k \frac{A(z_i)}{B'(z_i)} z_i^{n-1}, \quad (9.20)$$

которую можно использовать для $n \geq 1$. При этом величину $x(0)$ следует находить по теореме о начальном значении.

Пример 9.7. Определить выражение для решетчатой переходной функции $h[nT_0]$, если ее z -изображение $h(z) = \frac{z-2}{z^2-7z+12}$.

Начальное значение решетчатой функции равно: $h(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} x(z) = 0$. Для определения предыдущих значений по (9.20)

полагаем: $A(z) = z - 2$; $B(z) = z^2 - 7z + 12$; $k = 2$; $z_1 = 3$; $z_2 = 4$.

$$\text{Тогда } h[nT_0] = \frac{3-2}{2 \cdot 3 - 7} 3^{(n-1)} + \frac{4-2}{2 \cdot 4 - 7} 4^{(n-1)} = 2 \cdot 4^{(n-1)} - 3^{(n-1)}.$$

В соответствии с полученным выражением для $h[nT_0]$ имеем: $h(T_0) = 1$; $h(2T_0) = 5$; $h(3T_0) = 23$ и т. д.

Если число нулей равно числу полюсов (9.14) (порядок полиномов $A(z)$ и $B(z)$ одинаковый), следует, разделив $A(z)$ на $B(z)$, представить $x(z)$ в виде суммы составляющей нулевого порядка и дробно-рационального остатка. При этом первое слагаемое определяет величину $x(0)$, а по второму, используя формулу (9.18), можно вычислить искомую решетчатую функцию.

Пример 9.8. Определить выражение для решетчатой переходной функции $h[nT_0]$ разомкнутой дискретной САУ, передаточная функция ПНЧ которой равна: $W_{\text{ПНЧ}}(p) = \frac{1}{p+1}$. Период дискретизации

$T_0 = 1$ с.

Передаточная функция дискретной системы:

$$W(z) = Z\{W_{\text{ПНЧ}}(p)\} = Z\left\{\frac{1}{1+p}\right\} = \frac{z}{z - e^{-T_0}}.$$

Z -изображение переходной функции:

$$h(z) = W(z) \frac{z}{z-1} = \frac{z^2}{(z-1)(z-e^{-T_0})} = 1 + \frac{z(1+e^{-T_0}) - e^{-T_0}}{z^2 - z(z+e^{-T_0}) + e^{-T_0}}.$$

В соответствии с формулой (9.17) можно записать: $A(z) = z(1+e^{-T_0}) - e^{-T_0}$; $B'(z) = 2z - (z+e^{-T_0})$; $z_1 = 1$; $z_2 = e^{-T_0}$.

$$\text{Тогда } h(z) = (z-1)(z-e^{-T_0}) = z^2 - z(z+e^{-T_0}) + e^{-T_0}.$$

Начальное значение решетчатой функции: $h(0)=1$. Для $n \geq 1$ справедливо:

$$h[nT_0] = \frac{1}{2 \cdot 1 - (e^{-T_0} + 1)} 1^{(n-1)} + \frac{(e^{-T_0})^2}{2e^{-T_0} - (1 + e^{-T_0})} (e^{-T_0})^{(n-1)} =$$

$$= \frac{1}{1 - e^{-T_0}} [1 - e^{-(n+1)T_0}].$$

Величины дискрет: $h(1)=1,368$; $h(2)=1,504$; $h(3)=1,55$ и т. д. На рис. 9.6 приведен график решетчатой функции $h[nT_0]$ и возможный вид графика функции $h(t)$ (штриховая линия).

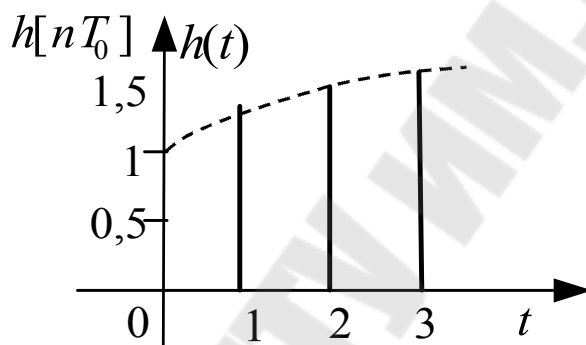


Рис. 9.6. Переходная функция для примера 9.8

Устойчивость замкнутой линейной системы зависит от расположения корней характеристического уравнения на комплексной плоскости p . Условие устойчивости заключается в том, что все корни должны находиться в левой полуплоскости. Так как дискретные системы с АИМ являются линейными, указанное условие распространяется на них [1].

Каждому корню p_i на плоскости p , согласно (9.10), соответствует корень z_i на плоскости z . Очевидно, что любой из p -корней, лежащий на мнимой оси, определяет z -корень, для которого $|z|=1$, и который, следовательно, расположен на единичной окружности, проведенной из начала координат комплексной плоскости z (рис. 9.7).

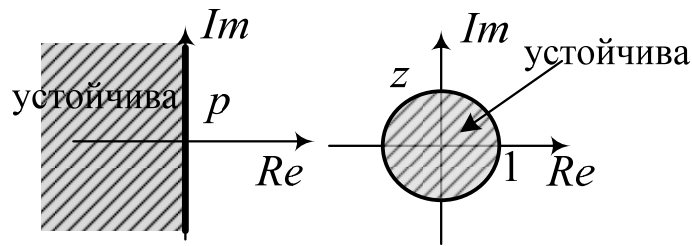


Рис. 9.7. Области устойчивости на плоскостях p и z

Всем корням p_i с отрицательными вещественными частями соответствуют z -корни, у которых $|z_i| < 1$. Если же вещественная часть корня p_i положительна, то $|z_i| > 1$. Таким образом, замкнутая линейная дискретная система устойчива, если все z -корни ее характеристического уравнения лежат внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

Так, для примера 9.1 было найдено характеристическое уравнение системы: $\lambda^2 - 1,5\lambda + 0,56 = 0$. Корни уравнения положительные: $\lambda_1 = 0,7$ и $\lambda_2 = 0,8$, следовательно, данная система будет устойчива.

Пример 9.10. Оценить устойчивость замкнутой дискретной системы, структурная схема которой приведена на рис. 9.8.

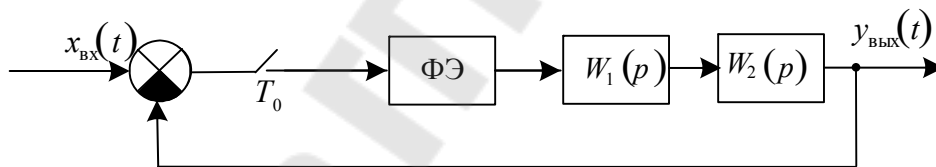


Рис. 9.8. Структура замкнутой дискретной САУ для примера 9.10

Передаточные функции в непрерывной части системы равны: $W_1(p) = \frac{4}{2p+1}$ и $W_2(p) = \frac{1}{5p+1}$. В качестве формирующего элемента используется экстраполятор нулевого порядка. Период квантования: $T_0 = 0,4$ с.

Опустив предварительные вычисления, аналогичные предыдущему примеру, получим передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_{\text{зам}}(z) = \frac{8,78 \cdot 10^{-3} + 7,9 \cdot 10^{-3}}{0,3z^2 - 0,514z + 0,235}$$

Полюса полученной передаточной функции – корни характеристического уравнения (знаменателя) $z_{1,2} = 0,856 \pm j0,221$.

Величина модуля комплексно-сопряженных корней:
 $|z_{1,2}| = \sqrt{(0,856)^2 + (0,221)^2} = 0,884 < 1$.

Так как все три корня находятся внутри единичного круга, можно сделать заключение, что система устойчива.

Для дискретных систем порядок характеристического уравнения превышает третий, определение корней этих уравнений представляет собой достаточно трудную задачу. Это обуславливает широкое применение косвенных методов оценки устойчивости (критериев устойчивости), не предполагающих вычисление корней характеристического уравнения.

Билинейное преобразование:

$$w = \frac{z-1}{z+1} \text{ и } z = \frac{w+1}{1-w} \quad (9.20)$$

переводит точки единичной окружности на плоскости z в точки, лежащие на мнимой оси плоскости w , и, наоборот. Любой точке, расположенной внутри этой окружности, согласно (9.20), соответствует точка левой полуплоскости w , а точки, находящиеся вне окружности, отображаются в точки, принадлежащие правой полуплоскости w .

Следовательно, условие устойчивости дискретной САУ, связанное с принадлежностью z -корней характеристического уравнения $C(z) = 0$ единичному кругу, равносильно условию принадлежности левой w -полуплоскости корней уравнения $C(w) = 0$, полученного из исходного уравнения путем билинейного преобразования.

Поэтому при использовании билинейного преобразования условия устойчивости непрерывных систем можно использовать для дискретных систем управления, например, критерий устойчивости Гурвица. Для этого в характеристическом уравнении выполняем подстановку $z = \frac{w+1}{1-w}$, при этом получаем характеристическое уравнение в форме билинейного преобразования:

$$c_k w^k + c_{k-1} w^{k-1} + \dots + c_1 w + c_0 = 0,$$

по которому составляем определитель Гурвица и определяем устойчивость так же, как и для непрерывных систем. Линейная дискретная система устойчива, если при $c_k > 0$ определитель Гурвица

и все его диагональные миноры положительны. В частности, критерий Гурвица позволяет найти критические по устойчивости значения параметров дискретных систем.

9.2. Задание на практическое занятие

9.2.1. Вычислить Z -преобразование для функции времени, изображение Лапласа которой $L\{f(t)\} = \frac{k}{p^2(T_1 p + 1)}$. Разложить изображение на простые дроби. Использовать таблицу Z -преобразований.

9.2.2. Произвести дискретизацию непрерывной системы по ее дифференциальному уравнению. Период дискретизации принять $T = 0,1$ с. Определить свободную составляющую решетчатой функции движения такой системы $y_{св}[nT_0]$. Оценить устойчивость по корням характеристического уравнения.

9.2.3. Определить разомкнутую дискретную передаточную функцию для системы по передаточной функции приведенной непрерывной части $W_{\text{ПНЧ}}(p)$ с периодом дискретизации T_0 . Оценить устойчивость при замыкании относительно заданного параметра.

9.2.4. Дано w -преобразование дискретной функции времени $F(w) = \frac{aT_0^2(1-w^2)w}{4w^3}$. Определить исходную дискретную функцию времени, используя билинейное преобразование $w = \frac{z-1}{z+1}$.

9.2.5. Определить дискретную передаточную функцию разомкнутой системы $W_{\text{раз}}(z)$ с периодом дискретизации T_0 по ее передаточной функции непрерывной части $W_{\text{НЧ}}(p)$; в качестве ФЭ использовать экстраполятор нулевого порядка. Оценить устойчивость при замыкании.

9.2.6. Определить выражение для решетчатой переходной функции $h[nT_0]$ разомкнутой дискретной САУ по ее передаточной функции приведенной непрерывной части $W_{\text{ПНЧ}}(p)$. Построить график функции $h[nT_0]$ для ее первых пяти значений, считая период дискретизации $T_0 = 1$ с.

9.2.7. По дискретной передаточной функции $W_{\text{раз}}(z)$ оценить устойчивость замкнутой дискретной САУ с помощью критерия Гурвица, используя билинейное преобразование $z = \frac{w+1}{1-w}$.

Варианты индивидуальных заданий согласно номеру студента по журналу группы размещены на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно назначение индивидуальных заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Приведите определение решетчатой функции.
2. Приведите определение дискретного преобразования Лапласа.
3. Приведите определение Z-преобразования.
4. Приведите определение дискретной передаточной функции.
5. Приведите определение дискретной передаточной функции приведенной непрерывной части.
6. Сформулируйте условие устойчивости дискретных систем.
7. Приведите формулу билинейного преобразования.

ГЛАВА 10. МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

10.1. Теоретические сведения

Нелинейной системой автоматического управления называется такая система, которая содержит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным дифференциальным или алгебраическим уравнением (рис. 10.1).

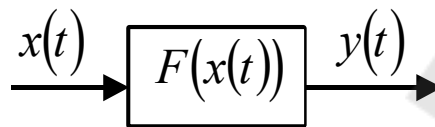


Рис. 10.1. Условное обозначение
нелинейного звена

Статические нелинейные элементы – это такие элементы системы автоматического управления, выходная переменная которых не зависит от скорости изменения входной величины (табл. 10.1).

Таблица 10.1

Статические нелинейные элементы

Звено с насыщением (ограничение)	
Характеристика	Уравнение нелинейного звена
	$y(x) = \begin{cases} -c & \text{при } x \leq -b; \\ \frac{c}{b}x & \text{при } x < b; \\ c & \text{при } x \geq b \end{cases}$
Реле с зоной нечувствительности	
Характеристика	Уравнение нелинейного звена
	$y(x) = \begin{cases} -c & \text{при } x \leq -b; \\ 0 & \text{при } -b \leq x \leq b; \\ c & \text{при } x \geq b \end{cases}$

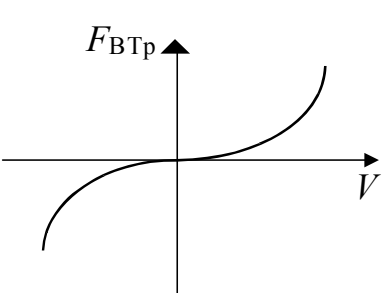
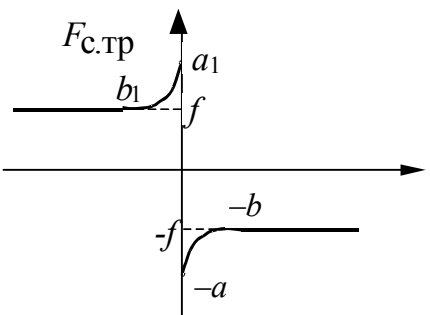
Идеальное релейное звено	
Характеристика	Уравнение нелинейного звена
	$y(x) = \begin{cases} -c & \text{при } x \leq -b; \\ 0 & \text{при } x = 0; \\ c & \text{при } x \geq b \end{cases}$

Динамические нелинейные элементы – это такие элементы системы автоматического управления, выходная переменная которых зависит не только от величины входного воздействия, но и от скорости его изменения (табл. 10.2).

Таблица 10.2

Динамические нелинейные элементы

Звено с насыщением (ограничение)	
Характеристика	Уравнение нелинейного звена
	$y(x) = \begin{cases} \text{при } \frac{dx}{dt} < 0 & \begin{cases} c & \text{при } x > b; \\ -c & \text{при } x < -b; \end{cases} \\ \text{при } \frac{dx}{dt} > 0 & \begin{cases} c & \text{при } x > -b; \\ -c & \text{при } x < -b \end{cases} \end{cases}$
Нелинейное звено типа «люфт»	
Характеристика	Уравнение нелинейного звена
	$y(x) = \begin{cases} k \cdot (x + b) & \text{при } \frac{dx}{dt} < 0; \\ k \cdot (x - b) & \text{при } \frac{dx}{dt} > 0 \end{cases}$ $y(x) = \begin{cases} c & \text{при } \frac{dx}{dt} < 0 \text{ и } \frac{dy}{dt} = 0; \\ -c & \text{при } \frac{dx}{dt} > 0 \text{ и } \frac{dy}{dt} = 0 \end{cases}$

Нелинейное звено типа «Вязкое трение»	
<i>Характеристика</i>	<i>Уравнение нелинейного звена</i>
	$F_{\text{Втр}} = kV^2 \text{sign} V,$ <p>где V – скорость движения объекта; k – коэффициент пропорциональности. Направление $F_{\text{Втр}}$ противоположно скорости движения объекта</p>
Нелинейное звено типа «Сухое трение»	
<i>Характеристика</i>	<i>Уравнение нелинейного звена</i>
	$F_{\text{с.тр}} = -f \text{sign} V$

Поведение нелинейных систем при наличии существенных нелинейностей значительно отличается от поведения их линейных моделей [6]. В отличие от линейных систем автоматического управления в нелинейных системах **не выполняется принцип суперпозиции** для математических моделей. Правил преобразования структурных схем, аналогичных для линейных систем, в общем случае не существуют. Так как не существуют общие методы решения нелинейных дифференциальных уравнений то, как правило, исследования нелинейных систем носят качественный, приближенный характер.

Особенности нелинейных систем включают следующее:

1. Выходная величина нелинейной системы непропорциональна входному воздействию; форма реакции системы зависит от величины входного воздействия.

2. Характер процессов в нелинейной системе определяется величиной начального отклонения, вызванного возмущением. В связи с этим для нелинейных систем существуют понятия об устойчивости «в малом», «в большом», «в целом».

3. Для нелинейных систем характерен режим незатухающих периодических колебаний с постоянной амплитудой и частотой (автоколебаний), возникающий в системах при отсутствии периодических внешних воздействий.

Система устойчива «в малом», если она устойчива при малых (бесконечно малых) начальных отклонениях. Система устойчива «в большом», если она устойчива при больших (конечных по величине) начальных отклонениях. Система устойчива «в целом», если она устойчива при любых больших (неограниченных по величине) начальных отклонениях.

4. При затухающих колебаниях переходного процесса в нелинейных системах происходит изменение периода колебаний.

5. В нелинейных САУ может существовать несколько установившихся движений (невозмущенных движений), устойчивость каждого из которых должна изучаться в отдельности.

6. Устойчивость того или иного невозмущенного движения нелинейной САУ зависит от величины начальных условий.

7. В нелинейных САУ возможен режим незатухающих устойчивых собственных колебаний, называемых автоколебаниями.

Рассмотрим далее некоторые методы исследования динамических свойств нелинейных САУ, получившие наибольшее применение для их анализа и синтеза.

К основным задачам исследования нелинейных систем относятся [8]:

- 1) отыскание возможных состояний равновесия системы и исследование их устойчивости;
- 2) определение автоколебаний и анализ их устойчивости;
- 3) исследование процессов перехода системы к тому или иному установившемуся состоянию при различных начальных отклонениях.

Все инженерные методы исследования нелинейных систем разделяются на две основные группы:

- *Точные методы*, например, метод А. М. Ляпунова, метод фазовой плоскости, метод точечных преобразований, частотный метод В. М. Попова, основаны на точном решении нелинейного дифференциального уравнения, может быть и упрощенного.

- *Приближенные методы*, такие как метод гармонической линеаризации, метод статистической линеаризации, основаны на линеаризации нелинейного уравнения системы.

Мощным и эффективным методом исследования нелинейных систем является моделирование, инструментарием которого служит компьютер. В настоящее время многие сложные для аналитического решения теоретические и практические вопросы сравнительно легко могут быть решены с помощью вычислительной техники.

Будем рассматривать класс нелинейных систем, который характеризуется следующими особенностями:

1. В системе автоматического управления можно выделить линейную часть (ЛЧ) – это составная часть системы, которая описывается линейными дифференциальными уравнениями.

2. В системе управления можно выделить единственный нелинейный элемент (НЭ).

Структурную схему нелинейной системы управления можно стремиться представить следующим образом (рис. 10.2).

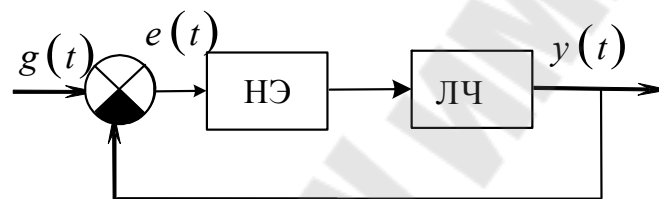


Рис. 10.2. Структурная схема нелинейной системы

Методы фазового пространства относятся к наиболее ранним точным аналитическим методам теории нелинейных систем. Можно отметить метод фазовой плоскости и метод точечных отображений или преобразований [1].

Фазовым пространством называется пространство, по осям координат которого отложены переменные, характеризующие состояние динамической системы. Если движение системы описывается дифференциальным уравнением n -го порядка, то состояние этой системы в любой момент времени можно характеризовать некоторой точкой n -мерного фазового пространства, по осям которого отложены одна из координат системы и $(n - 1)$ ее производных. Точка, характеризующая состояние системы, называется *изображающей точкой*.

Если уравнения системы управления представлены в нормальной форме, то вектор состояния системы однозначно определяет ее состояние. Каждому состоянию системы в пространстве состояний соответствует точка. Точка, соответствующая текущему состоянию системы, называется *изображающей точкой*. При изменении состояния изображающая точка описывает траекторию. Эта траектория на-

зывается фазовой траекторией. Совокупность фазовых траекторий, соответствующая всевозможным начальным условиям, называется фазовым портретом.

Наглядно фазовую траекторию и фазовый портрет можно представить в случае двумерного фазового пространства. Двухмерное фазовое пространство называется фазовой плоскостью.

Фазовая плоскость – это координатная плоскость, в которой по осям координат откладываются две переменные (фазовые координаты), однозначно определяющие состояние системы второго порядка.

Метод анализа и синтеза системы управления, основанный на построении фазового портрета, называют **методом фазовой плоскости**.

Метод фазовой плоскости используется для исследования систем второго порядка и заключается в построении фазовых портретов на плоскости. Для этого из уравнений состояния исключается время и определяются уравнения фазовых кривых. Задача становится достаточно простой, если рассматривается система с кусочно-линейной характеристикой нелинейного элемента. В этом случае в разных областях фазовой плоскости система описывается линейными уравнениями, в соответствии с которыми строятся фазовые траектории, в дальнейшем «сшивающиеся» по линиям переключения, определяемым видом нелинейной характеристики.

При исследовании нелинейных систем высокого порядка их аппроксимируют системами второго порядка с эквивалентным запаздыванием.

Для изображения процессов на фазовой плоскости нелинейное уравнение, описывающее систему, заменяют эквивалентными уравнениями первого порядка вида:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = F(x, y); \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases} \quad (10.1)$$

где x, y – координата системы и ее первая производная; $F(x, y)$ – нелинейная функция.

Разделив первое из уравнений (10.1) на второе, получим дифференциальное уравнение, из которого исключено время t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{y}. \quad (10.2)$$

Решение данного уравнения $y = F(x)$ определяет уравнение фазовой траектории, которая графически изображается на фазовой плоскости (x, y) . Каждой совокупности начальных условий (x_0, y_0) соответствуют свое решение и своя фазовая траектория. Семейство фазовых траекторий характеризует все возможные виды переходных процессов в данной системе управления при любых начальных условиях и образует ее фазовый портрет.

Основные свойства фазовых траекторий вытекают из выражения (10.2):

1) если $F(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области и имеет непрерывные частные производные по своим аргументам, то через всякую точку фазовой плоскости, за исключением особых точек, проходит единственная фазовая траектория. Это означает, что фазовые траектории не пересекаются между собой;

2) так как при $y > 0$ производная $\frac{dx}{dt} > 0$ и x только возрастает, то в верхней фазовой полуплоскости при возрастании времени t изображающая точка движется слева направо. Соответственно в нижней полуплоскости движение происходит справа налево. Направление движения на траекториях показывают стрелками;

3) в точках, где $y = 0$, $F(x, y) \neq 0$ (неособых точках на оси абсцисс), фазовые траектории пересекают ось под прямым углом.

Пример 10.1. Изобразим на фазовой плоскости переходный процесс и автоколебания в автоматической системе (рис. 10.2), линейная часть которой задана передаточной функцией

$$W_{\text{лч}} = \frac{k}{p(Tp + 1)},$$

а нелинейный элемент – статической $y_{\text{нэ}} = F(x)$.

В качестве координат фазовой плоскости выбираем отклонение управляемой величины x и скорость ее изменения $y = \frac{dx}{dt}$. Запишем для ошибки x дифференциальное уравнение системы, описывающее ее свободное движение:

$$T \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + kF(x) = 0,$$

которое заменяем эквивалентными уравнениями первого порядка:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y - \frac{k}{T}F(x); \\ \frac{dx}{dt} = y. \end{cases} \quad (10.3)$$

Разделив первое из уравнений (10.3) на второе, получаем дифференциальное уравнение фазовых траекторий:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{k}{T} \frac{F(x)}{y}. \quad (10.4)$$

По фазовому портрету можно судить о характере переходных процессов [10]. В частности, по фазовой траектории можно построить без расчетов качественно временную характеристику – кривую зависимости x_1 от времени, и, наоборот, по временной характеристике можно качественно построить фазовую траекторию.

В качестве примера сначала по фазовой траектории построим временную характеристику, а затем по временной характеристике – фазовую траекторию. Пусть задана фазовая траектория (рис. 10.3, а).

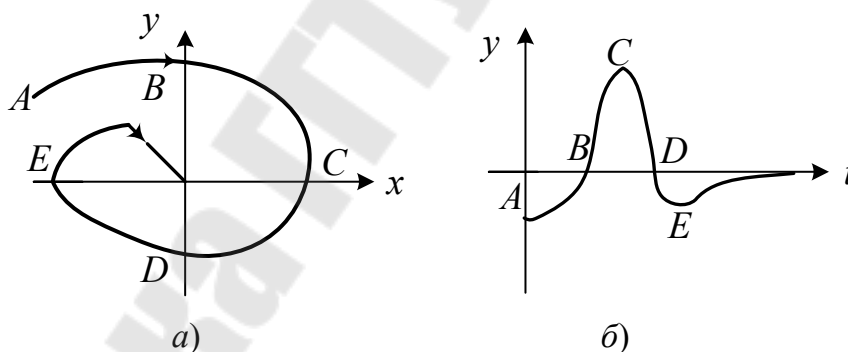


Рис. 10.3. Построение временной характеристики (а) по фазовой траектории (б)

Отметив на ней характерные точки (начальную точку (A), точки пересечения с осями координат (B, C, D, E)), нанесем соответствующие им точки на временной плоскости и соединим их плавной кривой (рис. 10.3, б).

Пусть теперь задана временная характеристика (рис. 10.4, а). Отметив на ней характерные точки (начальную точку (A), точки экстремума (C, E) и точки пересечения с временной осью (B, D)), нанесем соответствующие им точки на фазовую плоскость и соединим их плавной кривой (рис. 10.4, б).

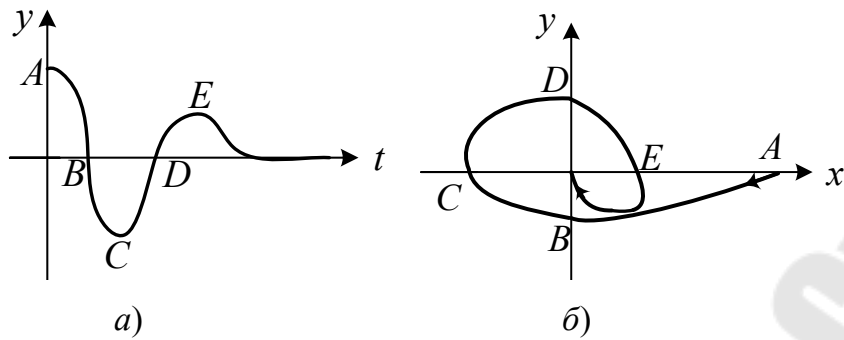


Рис. 10.4. К построению фазовой траектории (б) по временной характеристике (а)

Рассмотрим примеры построения фазовых траекторий.

Пример 10.2. Построить фазовый портрет нелинейной системы, изображенной на рис. 10.5, считая, что $\frac{d^2 y}{dt^2} = u$, $e = g_0 - y$. Передаточная функция линейной части определяется как $W_{\text{ЛЧ}}(p) = \frac{k}{p^2}$, а нелинейным элементом является реле с зоной нечувствительности, которое описывается следующими уравнениями:

$$u = \begin{cases} 1, & \text{при } y > a; \\ 0, & \text{при } |e| \leq a; \\ -1, & \text{при } e < -a. \end{cases}$$

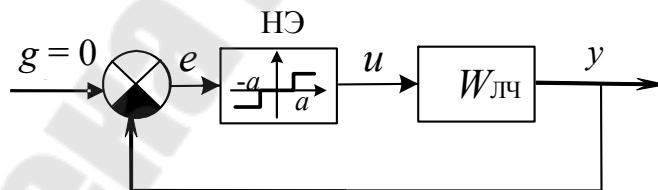


Рис. 10.5. Система с нелинейным элементом вида «реле с зоной нечувствительности»

Введем новые переменные: $\frac{d^2 y}{dt^2} = u$, $x = e$, $y = \frac{dx}{dt}$. В новых переменных уравнения системы примет вид:

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = u, \quad u = \begin{cases} 1, & x > a; \\ 0, & |x| \leq a; \\ -1, & x < -a. \end{cases}$$

Разобьем фазовую плоскость на три области I, II, III прямыми $x = a$ и $y = -a$ (рис. 10.6). В пределах каждой области $u = \text{const}$.

Разделив в последней системе второе уравнение на первое и проинтегрировав его, получим:

$$y^2 = -2ux + C.$$

В области I ($x < -a$) $u = -1$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $y^2 = 2x + C_1$; оно определяет семейство парабол, направленных вправо. В области II ($|x| \leq a$) $u = 0$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $y^2 = C_2$, оно определяет семейство прямых, параллельных оси абсцисс. В области III ($x > a$) $u = 1$, и уравнение фазовых траекторий имеет вид $y^2 = -2x + C_3$; оно определяет семейство парабол, направленных влево.

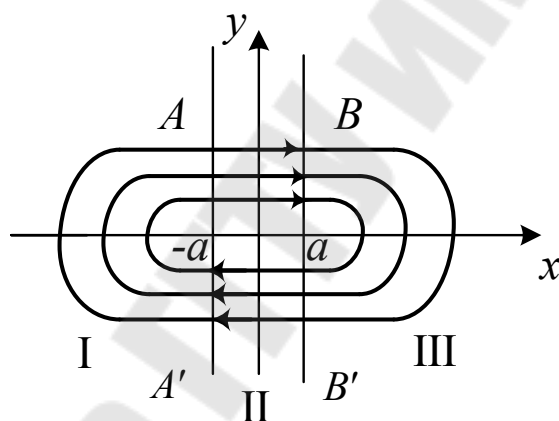


Рис. 10.6. Фазовый портрет системы к примеру 10.2

Как видим, уравнения фазовых траекторий во всех трех областях различаются между собой, и при переходе из одной области в другую через границу происходит переключение с одного вида траекторий на другой. Линии, на которых происходят такие переключения, называются *линиями переключения*.

На рис. 10.6 изображен фазовый портрет системы, по которому видно, что при ненулевых начальных условиях в системе возникают незатухающие колебания. Амплитуда колебаний зависит от начальных условий, и, следовательно, эти колебания не являются автоколебаниями.

Пример 10.3. Построить фазовый портрет нелинейной системы, изображенной на рис. 10.7. Передаточные функции линейной части определяются в виде: $W_2(p) = k_2(p)$, а нелинейным элементом является идеальное реле. Система описывается следующими уравнениями:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = k_1 \sigma, \quad \sigma = c \operatorname{sign}(e), \quad e = -k_2 \left(\frac{dy}{dt} + y \right).$$

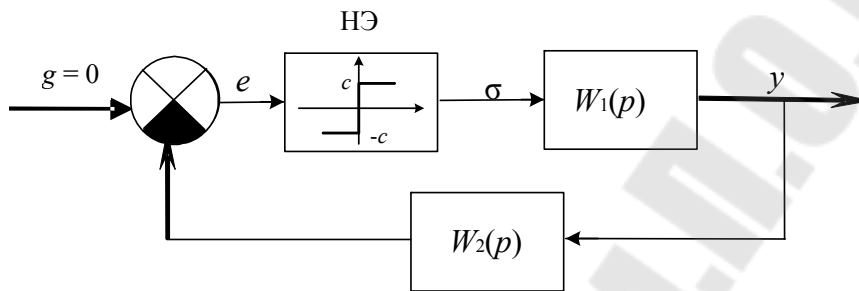


Рис. 10.7. Нелинейная система с нелинейным элементом типа «идеальное реле» для примера 10.3

Вводя новые переменные $x_1 = y$, $y_1 = \frac{dx_1}{dt}$, уравнения системы можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = y_1; \\ \frac{dy_1}{dt} = -k_1 c \operatorname{sign}(k_2 y_1 + x_1). \end{cases}$$

Разделив второе уравнение на первое, получим такое уравнение:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-k_1 c \operatorname{sign}(k_2 y_1 + x_1)}{y_1}.$$

Прямая AB на рис. 10.8, которая описывается уравнением $k_2 y_1 + x_1 = 0$, делит фазовую плоскость на две области: область I, где $k_2 y_1 + x_1 > 0$, и область II, где $k_2 y_1 + x_1 < 0$. Последнее уравнение в области I принимает вид:

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-k_1 c}{y_1}, \quad \text{или} \quad y_1 dy_1 = -k_1 c dx_1,$$

а в области II

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{k_1 c}{y_1}, \text{ или } y_1 dy_1 = k_1 c dx_1.$$

Решив эти уравнения, получаем следующие уравнения для фазовых траекторий:

$$y_1^2 = -2k_1 c x_1 + C_1$$

– в области I;

$$y_1^2 = 2k_1 c x_1 + C_2$$

– в области II.

Эти уравнения являются уравнениями парабол, направленных навстречу друг другу. На основе этих уравнений построен фазовый портрет (рис. 10.8).

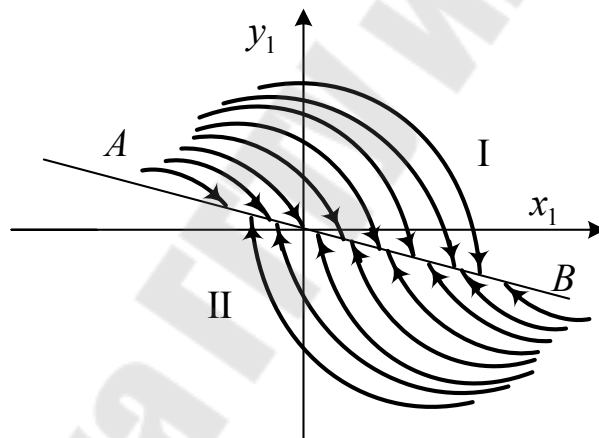


Рис. 10.8. Фазовый портрет системы к примеру 10.3

Из рис. 10.8 следует, что если изображающая точка не находится на линии переключения (прямая AB), то она до достижения этой прямой будет двигаться по одной из фазовых траекторий.

Как только изображающая точка пересечет линию переключения, она попадет на одну из фазовых траекторий, направленных в сторону линии переключения. Поэтому изображающая точка опять будет двигаться в сторону линии переключения, пока не пересечет ее. Как только изображающая точка снова пересечет линию переключения, она опять окажется на фазовой траектории, направленной в сторону линии переключения. Поэтому изображающая точка по достижении линии переключения будет двигаться по ней, теоретически

совершая колебания с бесконечно малой амплитудой и бесконечно большой частотой. В действительности, так как реле обладает конечной скоростью переключения, частота не будет бесконечно большой, а амплитуда бесконечно малой.

Таким образом, когда изображающая точка достигнет линии переключения, она теоретически будет скользить по этой линии и двигаться к положению равновесия. Такой процесс называют **скользящим режимом**.

В тех случаях, когда решение уравнения (10.2) аналитическими методами затруднительно или невыполнимо, фазовые траектории можно построить приближительным графическим **методом изоклин** [2, 7, 10].

Изоклины представляют собой геометрическое место всех точек фазовой плоскости, для которых наклон фазовой траектории равен постоянному значению C_i , т. е. $\frac{dy}{dt} = C_i$. Тогда вместо (10.2) можно написать уравнение $\frac{F(x, y)}{y} = C_i$, из которого получается уравнение изоклины $y = f(x, C_i)$.

Задавая различные значения C_i наклона касательных к фазовым траекториям, пересекающим эти изоклины, строят семейство изоклин, которые используются для построения фазовых траекторий (рис. 10.9). Фазовая траектория в точке пересечения с изоклиной имеет угол наклона $\arctg C_i$. В качестве примера на рис. 10.9 на изоклинах отмечены наклоны касательных к пересекающим их траекториям направляющими стрелками и построена фазовая траектория, исходящая из точки A .

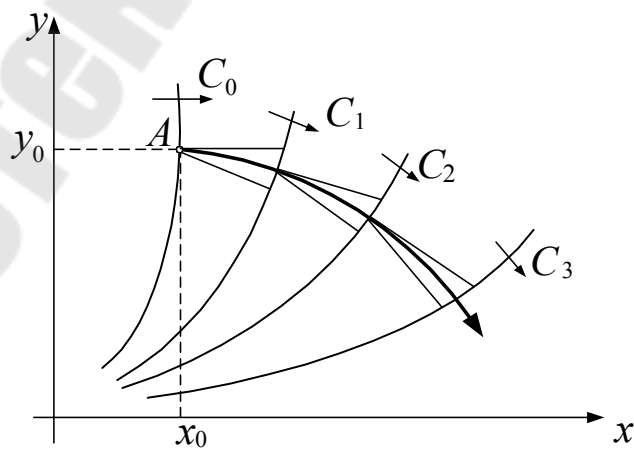


Рис. 10.9. Построение фазовой траектории методом изоклин

Методика построения фазового портрета методом изоклин складывается из следующих этапов:

- построение изоклин;
- нанесение направления касательных к фазовым траекториям;
- определение характера искомого фазового портрета.

Пример 10.4. Построить фазовый портрет нелинейной системы, изображенной на рис. 10.10, полагая, что $g = 1$, передаточная функция линейной части определяется как $W_{\text{лч}}(p) = \frac{10}{p^2 + 2p + 6}$, нелинейным элементом является идеальное реле, причем $c = 2$.

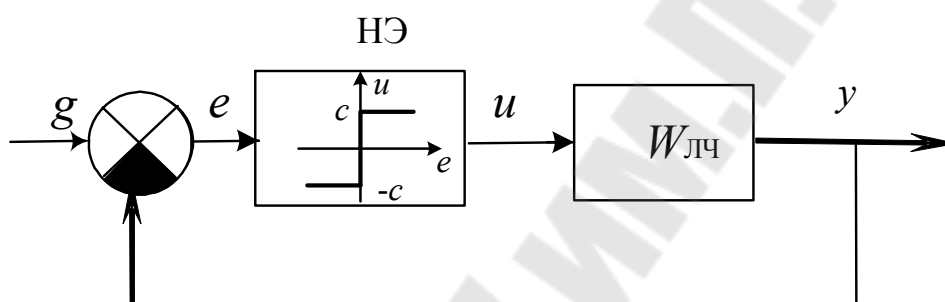


Рис. 10.10. Нелинейная система с нелинейным элементом типа «идеальное реле» для примера 10.4

Рассмотрим две области пространства состояний при $e > 0$ и $e < 0$.

В первой области $e > 0$, и, так как $e = g - y = 1 - y$, следовательно, $y < 1$.

Уравнение замкнутой системы для этой области:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2 \frac{dy}{dt} + 6y = 10c.$$

Введем новые переменные и запишем систему уравнений переменных состояния:

$$\begin{cases} y = x_1; \\ \frac{dx_1}{dt} = y_1; \\ \frac{dy_1}{dt} = -6x_1 - 2y_1 + 20. \end{cases}$$

Делим третье уравнение на второе, получаем:

$$C = \frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-6x_1 - 2y_1 + 20}{y_1}.$$

Из этого выражения получаем уравнения семейства изоклин:

$$y_1(C, x_1) = \frac{6x_1 + 20}{C + 2} \text{ и } \varphi = \arctg C_i.$$

Задавая $-\infty < C_i < \infty$, находим конкретную изоклину $y_1(C_i, x_1)$ и угол φ_i , под которым фазовая траектория пересекает эту изоклину.

Для второй области при $e < 0$ или $y > 1$ уравнение семейства изоклин определяется аналогично первой области.

Далее на фазовой плоскости строятся изоклины $y_1(C_i, x_1)$, на которых отмечается угол φ_i . Из начальных условий проводится кривая с соблюдением углов пересечения изоклин.

Например, для начальных условий $x_1(0) = -0,5$ и $y_1(0) = -2$ фазовая траектория для данного примера имеет вид, представленный на рис. 10.11.

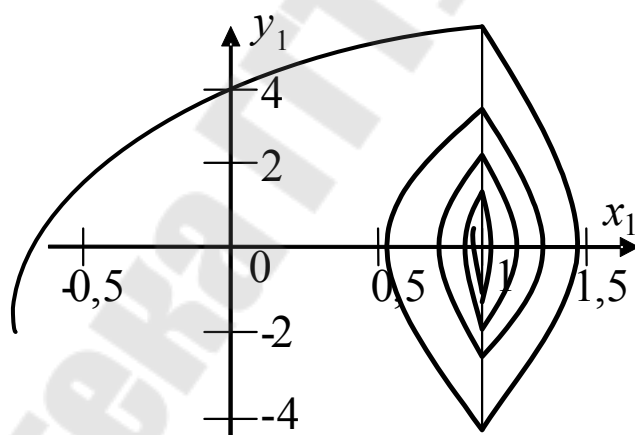


Рис. 10.11. Фазовая траектория для примера 10.4 при начальных условиях $x_1(0) = -0,5$ и $y_1(0) = -2$

10.2. Задание на практическое занятие

10.1. По заданной фазовой траектории нелинейной системы построить ее временную характеристику.

10.2. По заданной временной характеристике построить ее фазовую траекторию.

10.3. Построить фазовый портрет нелинейной системы, изображенной на рис. 10.5, с заданным нелинейным элементом и передаточной функцией линейной части $W_{\text{лч}}(p)$. Сделать вывод о наличии или отсутствии автоколебаний.

10.4. Построить фазовый портрет нелинейной системы, изображенной на рис. 10.7, с заданными нелинейным элементом и передаточными функциями линейной части $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Сделать вывод о наличии или отсутствии автоколебаний.

10.5. Построить фазовый портрет нелинейной системы, изображенной на рис. 10.10, с заданной передаточной функцией линейной части $W_{\text{лч}}(p)$. Сделать вывод о наличии или отсутствии автоколебаний.

Варианты индивидуальных заданий согласно номеру студента по журналу группы размещены на учебном портале университета в электронном курсе по предмету «Теория автоматического управления». Возможно назначение индивидуальных заданий на усмотрение преподавателя.

Контрольные вопросы

1. Приведите примеры характеристик и уравнений статических нелинейных элементов.

2. Приведите примеры характеристик и уравнений динамических нелинейных элементов.

3. Назовите отличия нелинейных систем автоматического управления от линейных.

4. Какие основные задачи исследования нелинейных систем?

5. Назовите методы исследования нелинейных систем.

6. Что такое фазовое пространство?

7. Какой метод называют методом фазовой плоскости?

8. Как определить уравнение для построения фазовой траектории?

9. Как по фазовому портрету сделать вывод о характере переходных процессов?

Литература

1. Бесекерский, В. А. Теория автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. Н. Попов. – Изд. 4-е, перераб и доп. – СПб. : Профессия, 2003. – 752 с.
2. Воронов, А. А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы / А. А. Воронов. – М. : Энергоиздат, 1981. – 304 с.
3. Гальперин, М. В. Автоматическое управление : учебник / М. В. Гальперин. – М. : Форум : Инфра-М, 2007. – 223 с.
4. Ким, Д. П. Теория автоматического управления : учеб. пособие / Д. П. Ким. – М. : Физматлит, 2003. – Т. 1. Линейные системы. – 288 с.
5. Ким, Д. П. Теория автоматического управления : учеб. пособие / Д. П. Ким. – М. : Физматлит, 2004 – Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. – 464 с.
6. Корнеев, Н. В. Теория автоматического управления с практикумом : учеб. пособие для студентов высш. учеб. заведений / Н. В. Корнеев, Ю. С. Кустарев, Ю. Я. Морговский. – М. : Академия, 2008. – 224 с.
7. Кузьмицкий, И. Ф. Теория автоматического управления: учебник для студентов специальностей «Автоматизация технологических процессов и производств», «Автоматизация паротурбинных установок и ядерных реакторов АЭС», «Информационные технологии и управление в технических системах» / И. Ф. Кузьмицкий, Г. Т. Кулаков. – Минск : БГТУ, 2010. – 572 с.
8. Лазарева, Т. Я. Основы теории автоматического управления : учеб. пособие / Т. Я. Лазарева, Ю. Ф. Мартемьянов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Тамбов : Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2004. – 352 с.
9. Мирошник, И. В. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами / И. В. Мирошник, В. О. Никифоров, А. Л. Фрадков. – СПб. : Наука, 2000. – 549 с.
10. Котова, Ю. Е. Теория автоматического управления : практикум по одному дисциплине для студентов специальности 1-36 04 02 «Промышленная электроника» днев. и заоч. форм обучения / Ю. Е. Котова, В. Н. Гарбуз. – Гомель : ГГТУ, 2015. – 83 с. – URL: <http://elib.gstu.by/>.
11. Французова, Г. А. Сборник задач по теории автоматического управления : учеб. пособие / Г. А. Французова, О. Я. Шпилевская, В. Д. Юркевич. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2001. – Ч. 2. – 51 с.

Учебное электронное издание комбинированного распространения

Учебное издание

Котова Юлия Евгеньевна

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

ПОСОБИЕ

Электронный аналог печатного издания

Редактор *Т. Н. Мисюрова*
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 09.07.25.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Цифровая печать. Усл. печ. л. 5,81. Уч.-изд. л. 6,45.

Изд. № 29.

<http://www.gstu.by>

Издатель и полиграфическое исполнение
Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого.
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель