

С. А. ВАКИН

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ВДОЛЬ БЕСКОНЕЧНОЙ СПИРАЛЬНОЙ ЩЕЛИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 1 III 1952)

Рассмотрим бесконечный цилиндр круглого сечения радиуса r_0 с идеально проводящими стенками бесконечно малой толщины, помещенный в однородную изотропную среду без потерь. Пусть на поверхности цилиндра по закону винтовой линии прорезана достаточно узкая щель постоянной ширины d . В дальнейшем мы такую систему будем называть бесконечной спиральной щелью.

Определим условия, при которых вдоль бесконечной спиральной щели будут распространяться бегущие незатухающие волны в направлении положительных L^* .

Зависимость от времени возьмем в виде $e^{-i\omega t}$. Так же как и в случае тонкой проволоочной спирали ⁽¹⁾, введем две системы координат: 1) цилиндрическую систему r, φ, z ; 2) ортогональную криволинейную систему L, u на поверхности щели, где линии L параллельны оси щели, а линии u им перпендикулярны.

Бегущая вдоль щели волна напряжения опишется следующим выражением:

$$U = U_0 e^{ik_n L} = U_0 e^{ihz_1}; \quad (1)$$

k_n и h — постоянные распространения, $h = k_n / \sin \delta$.

Необходимо определить частоты и геометрические параметры бесконечной спиральной щели, при которых h и k_n будут принимать только действительные значения, чему соответствует незатухающая бегущая волна напряжения ⁽¹⁾.

Будем решать эту задачу следующим образом:

1) Задаваясь законом распределения напряжения на щели в виде (1), найдем поле внутри и вне цилиндра, т. е. решим, соответственно, внутреннюю и внешнюю первую граничную задачу электродинамики.

2) Воспользовавшись непрерывностью касательной составляющей магнитного вектора при переходе через поверхность щели, составим затем трансцендентное уравнение для определения h

$$H_L^e(h) = H_L^i(h) \quad \text{при } r = r_0; \quad (2)$$

* В настоящей статье применены те же обозначения, что и в работе ⁽¹⁾.

H_L^i и H_L^e — составляющие магнитного вектора вдоль L , соответственно на внутренней и внешней поверхности цилиндра;

$$H_L = H_\varphi \cos \delta + H_z \sin \delta. \quad (3)$$

Так как мы будем рассматривать только достаточно узкие щели, для которых

$$\Delta = \frac{d}{r_0} \ll 1, \quad \frac{d}{\lambda} \ll 1, \quad \frac{d}{S} \ll 1, \quad (3')$$

то составляющей магнитного вектора по u можно пренебречь.

Как известно ⁽²⁾, в случае щели, удовлетворяющей условию (3'), электрическое поле на ее поверхности с учетом равенства (1) может быть записано так:

$$E_u^{(s)} = \frac{U_0}{\pi V (d/2)^2 - u^2} e^{ihz_1}. \quad (4)$$

Если s — геометрическая поверхность щели, s_i и s_e — соответственно внутренняя и внешняя сторона поверхности цилиндра за вычетом s , а v_i и v_e — пространство соответственно внутри и вне цилиндра, то внутренняя, а также внешняя граничные задачи сводятся к следующей: требуется определить поле в пространстве v_i (v_e), ограниченном поверхностью $s_i + s$ ($s_e + s$), по заданным на ней тангенциальным составляющим электрического вектора

$$E_t = \begin{cases} 0 & \text{на } s_i \text{ (} s_e \text{),} \\ E_u^{(s)} & \text{на } s. \end{cases} \quad (5)$$

Кроме того, искомое поле на бесконечности должно удовлетворять условиям излучения.

Для решения этой задачи наиболее удобным является метод Я. Н. Фельда, предложенный им в 1946 г. и подробно разобранный в работе ⁽²⁾.

В соответствии с этим методом введем вспомогательное поле E^0 , H^0 , регулярное в пространстве v_e (v_i), удовлетворяющее принципу излучения и некоторым граничным условиям на поверхности цилиндра, после чего применим к искомому E , H и вспомогательному полю E^0 , H^0 известную лемму Лоренца, которую в случае внешней граничной задачи можно преобразовать к следующему виду:

$$\int_{s+s_e} (E_z^0 H_\varphi - E_\varphi^0 H_z) ds = \int_s E_u^s H_L^0 ds. \quad (6)$$

Вспомогательное поле выбираем так, чтобы оно удовлетворяло следующим граничным условиям на поверхности цилиндра:

$$\left. \begin{aligned} E_z^0 &= 0, \\ E_\varphi^0 &= \frac{1}{2\pi V r_0} e^{-in(\varphi - \varphi_1)} e^{-i\gamma(z - z_1)}, \\ n &= \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots; \quad -\infty < \gamma < \infty. \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{на } s + s_e \\ (r = r_0) \end{array} \quad (7)$$

В этом случае

$$\int_{s+s_e} H_z e^{-in(\varphi - \varphi_1)} e^{-i\gamma(z - z_1)} ds = 2\pi V r_0 b_n(\gamma), \quad (8)$$

где

$$b_n(\gamma) = - \int_s E_u^{(s)} H_L^0 ds. \quad (9)$$

Из равенства (8) следует, что

$$H_z = \frac{1}{2\pi V r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{*in(\varphi-\varphi_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} b_n(\gamma) e^{i\gamma(z-z_1)} d\gamma \quad (\text{на } s + s_e). \quad (10)$$

Выражение (10) принципиально определяет одну из компонент искомого поля. При определении второй компоненты вспомогательное поле зададим иными граничными условиями, а именно положим:

$$\left. \begin{aligned} E_z^0 &= \frac{1}{2\pi V r_0} e^{-in(\varphi-\varphi_1)} e^{-i\gamma(z-z_1)}, \\ E_\varphi^0 &= A_1 e^{-in(\varphi-\varphi_1)} e^{-i\gamma(z-z_1)}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{на } s + s_e \\ &(r = r_0) \end{aligned} \quad (11)$$

где A_1 — некоторая постоянная.

Из равенства (6) получаем:

$$\int_{s+s_e} H_\varphi e^{-in(\varphi-\varphi_1)} e^{-i\gamma(z-z_1)} ds = 2\pi V r_0 a_n(\gamma), \quad (11')$$

$$a_n(\gamma) = \int_s E_u^{(s)} H_L^0 ds + \int_{s+s_e} E_\varphi^0 H_z ds. \quad (12)$$

Следовательно, решение для H_φ также получается в виде бесконечного ряда типа (10), с той лишь разницей, что вместо коэффициентов $b_n(\gamma)$ необходимо подставить $a_n(\gamma)$.

Коэффициенты $a_n(\gamma)$ и $b_n(\gamma)$ могут быть определены после нахождения вспомогательных полей по заданным граничным условиям (7) и (11) с помощью магнитного или электрического вектора Герца.

В случае граничных условий (7) вводится магнитный вектор Герца

$$\Pi_m = \Pi_{mz} = A H_n^{(1)}(r \sqrt{k^2 - \gamma^2}) e^{-in(\varphi-\varphi_1)} e^{-i\gamma(z-z_1)};$$

A — некоторая постоянная, определяемая из граничных условий.

При граничных условиях (11) вводится электрический вектор Герца.

Зная коэффициенты разложения $a_n(\gamma)$ и $b_n(\gamma)$, с помощью теоремы об интеграле Фурье находим решение внешней граничной задачи:

$$H_z = \frac{U_0 i}{2\pi\omega\mu r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi + iP_n z} C_n \left(\frac{n P_n \operatorname{ctg} \delta}{r_0 \sqrt{k^2 - P_n^2}} - \sqrt{k^2 - P_n^2} \right) \frac{H_n^{(1)}(r \sqrt{k^2 - P_n^2})}{H_n^{(1)}(r_0 \sqrt{k^2 - P_n^2})}, \quad (13)$$

$$\begin{aligned} H_\varphi &= \frac{U_0 i}{2\pi r_0^2 \omega \mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi + iP_n z} C_n \left(\frac{n P_n}{\sqrt{k^2 - P_n^2}} - \frac{n^2 P_n^2 \operatorname{ctg} \delta}{r_0 \sqrt{(k^2 - P_n^2)^3}} \right) \frac{H_n^{(1)}(r \sqrt{k^2 - P_n^2})}{H_n^{(1)}(r_0 \sqrt{k^2 - P_n^2})} + \\ &+ \frac{U_0 i \omega \varepsilon \operatorname{ctg} \delta}{2\pi r_0} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{in\varphi + iP_n z} C_n \frac{1}{\sqrt{k^2 - P_n^2}} \frac{H_n^{(1)\prime}(r \sqrt{k^2 - P_n^2})}{H_n^{(1)}(r_0 \sqrt{k^2 - P_n^2})}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$C_n = J_0 \left[\frac{d}{2} \left(P_n \cos \delta - \frac{n}{r_0} \sin \delta \right) \right], \quad P_n = h - \frac{2\pi}{S} n.$$

Решение внутренней задачи может быть получено из выражений (13) и (14), если в них функции Ханкеля заменить функциями Бесселя первого рода.

Подставив полученные значения для H_z и H_φ в равенство (2), получим следующее трансцендентное уравнение для постоянной распространения:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n \left\{ -\frac{(r_0^2 h P_n - r_0^2 k^2)}{r_0^2 k^2 U_n^4 K_n'(U_n) I_n'(U_n)} - \frac{\text{ctg}^2 \delta}{U_n^2 K_n(U_n) I_n(U_n)} \right\} = 0, \quad (15)$$

$$U_n = |r_0 v_n|, \quad r_0 v_n = \sqrt{r_0^2 P_n^2 - r_0^2 k^2}.$$

Уравнение (15) решается графически. Результаты решения для четырех различных значений δ приведены на рис. 1. Там же изображена частотная зависимость коэффициента замедления τ волны вдоль щели ($\tau = k/k_n$).

Штрихованные области $r_0 k$ соответствуют частотам, при которых постоянная распространения k_n принимает комплексные значения. В дальнейшем эти области будем называть областями затуханий.

Пунктиром обозначены границы области затухания и кривая частотной зависимости $\tau(r_0 k)$ для щели очень малой ширины ($d \rightarrow 0$). В этом случае частоты, соответствующие первой области затуханий, находятся из условия $\frac{1 - \sin \delta}{\cos \delta} < r_0 k < \frac{1 + \sin \delta}{\cos \delta}$.

Значения коэффициента замедления для щелей конечной ширины и результаты экспериментальных измерений нанесены в виде отдельных точек. Совпадение расчета с данными эксперимента вполне удовлетворительное.

Таким образом, в случае узкой спиральной щели, в отличие от проволочной спирали, область замедления отсутствует, а фазовая скорость волн, распространяющихся без затухания, весьма близка к скорости в вакууме.

Автор выражает глубокую благодарность за научное руководство и интерес к настоящей работе проф. Я. Н. Фельду, а также проф. В. В. Ширкову за ряд ценных советов.

Поступило
12 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ С. Х. Коган, ДАН, 66, № 5, 867 (1949). ² Я. Н. Фельд, Основы теории щелевых антенн, М., 1948.

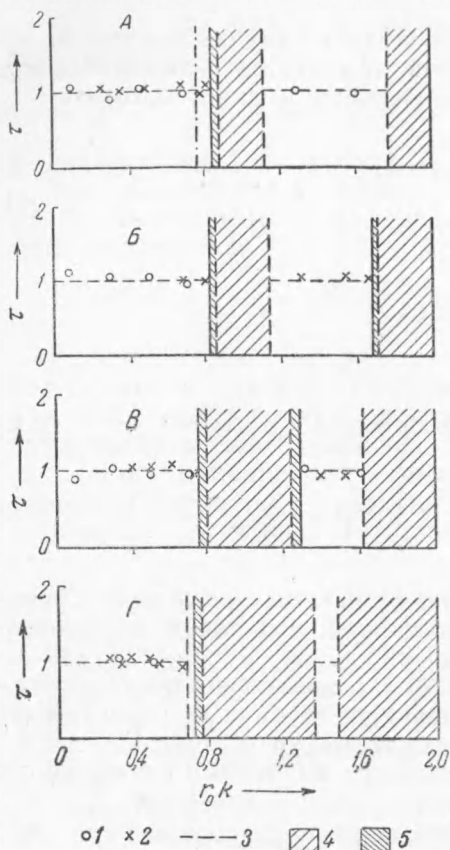


Рис. 1. Частотная зависимость коэффициента замедления τ для щелей конечной ширины. 1—расчетные точки ($d \neq 0$); 2—экспериментальные точки; 3—кривые для идеализированного случая ($d \rightarrow 0$); 4—области затуханий идеализированной линии; 5—дополнительные области затуханий в реальной линии, полученные экспериментально. А— $\delta = 7^\circ$, $\Delta = 0,0005$; Б— $\delta = 8^\circ 30'$, $\Delta = 0,0004$; В— $\delta = 12^\circ$, $\Delta = 0,001$; Г— $\delta = 17^\circ$, $\Delta = 0,004$