Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Г. Ц. ТУМАРКИН

О ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ КОМПЛЕКСНОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 III 1952)

Пусть $\sigma(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ — неубывающая функция ограниченной вариации. Обозначим через $L^p(d\sigma; 0,2\pi)$, где $p > 0$, совокупность всех комплекснозначных функций $f(t)$, для которых $\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p\, d\sigma(t) < \infty$*. Тогда при $p \geqslant 1$ $L^p(d\sigma; 0,2\pi)$ есть линейное нормированное пространство, если положить $\|f\| = \sqrt[p]{\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p\, d\sigma(t)}$.

Н. И. Ахиезер [1] доказал, что для замкнутости в пространстве $L^p(d\sigma; 0,2\pi)$, $p \geqslant 1$, последовательности функций $\{e^{int}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int\limits_0^{2\pi} \log \sigma'(t)\, dt = -\infty^{**}. \tag{1}$$

(При $p = 2$ эта теорема была впервые доказана А. Н. Колмогоровым [2], а затем в более общей форме М. Г. Крейном [3].)

В приводимой ниже теореме этот результат распространяется на случай любого $p > 0$ и указываются необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $f(t)$, принадлежащая замыканию линейной оболочки системы $\{e^{int}\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, в $L^p(d\sigma; 0,2\pi)$, когда $\sigma(t)$ не удовлетворяет условию (1).

Теорема 1. *Если $\sigma(t)$ удовлетворяет условию* (1), *то для любой измеримой функции $f(t)$, для которой*

$$\int\limits_0^{2\pi} |f(t)|^p\, d\sigma(t) < \infty, \quad p > 0, \tag{2}$$

найдется последовательность $\{\Pi_k(e^{it})\}$ многочленов от e^{it} такая, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} |f(t) - \Pi_k(e^{it})|^p\, d\sigma(t) = 0. \tag{3}$$

Если же для $\sigma(t)$ не выполняется (1), *то для существования последовательности многочленов $\{\Pi_k(e^{it})\}$, удовлетворяющей условию* (3), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (2) *и функция $F(e^{it}) = f(t)$ совпадала почти всюду на окружности $|z| = 1$ с*

* Здесь и в дальнейшем интеграл понимается в смысле Лебега — Стильтьеса.
** См. также [10], стр. 278.

граничными значениями аналитической в круге $|z|<1$ функции класса D.

(Аналитическая в круге $|z|<1$ функция $F(z)$ принадлежит классу D, если $\lim_{r \to 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |F(re^{it})|\, dt = \int_0^{2\pi} \ln^+ |F(e^{it})|\, dt < \infty$ *.)

Приведем приложение этих результатов к вопросу о приближении в среднем многочленами комплекснозначных функций на спрямляемых кривых.

Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая длины l и G — область, ограниченная кривой γ. Обозначим через $z=\varphi(w)$ функцию, дающую конформное отображение круга $|w|<1$ на область G, и через $w=\psi(z)$ — функцию, обратную к $z=\varphi(w)$. Обозначим далее через s длину дуги кривой γ, отсчитываемую от некоторой точки ζ_0 кривой γ, $0 \leqslant s \leqslant l$, и пусть $\sigma(s)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, определенная при $0 \leqslant s \leqslant l$. Рассмотрим пространство $L^p(d\sigma, \gamma)$, $p>0$, комплекснозначных функций $f(\zeta)$, определенных на γ, для которых $\int_\gamma |f(\zeta)|^p d\sigma(s) < \infty$.

Я. Л. Геронимус [4] показал, что условие, необходимое и достаточное для замкнутости системы $\{\zeta^n\}$, $n=0, 1, 2, \dots$, в пространстве $L^p(d\sigma, \gamma)$ при $p \geqslant 1$ заключается в том, что

$$\int_\gamma \log \sigma'(s) |\psi'(\zeta)\, d\zeta| = -\infty. \tag{4}$$

В формулируемой далее теореме этот результат распространяется на случай любого $p>0$ и указывается характеристическое свойство функций $f(\zeta)$, которые могут быть приближены как угодно хорошо многочленами, если $\sigma(s)$ не удовлетворяет условию (4).

Теорема 2. *Если $\sigma(s)$ удовлетворяет условию* (4), *то для любой измеримой на γ функции $f(\zeta)$, для которой*

$$\int_\gamma |f(\zeta)|^p d\sigma(s) < \infty, \tag{5}$$

где p — произвольное число >0, существует последовательность многочленов $\{\Pi_k(\zeta)\}$ от ζ такая, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_\gamma |f(\zeta) - \Pi_k(\zeta)|^p d\sigma(s) = 0. \tag{6}$$

В случае же, когда

$$\int_\gamma \log \sigma'(s) |\psi'(\zeta)\, d\zeta| > -\infty, \tag{7}$$

для существования последовательности многочленов $\{\Pi_k(\zeta)\}$, удовлетворяющей условию (6), *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось* (5) *и функция $f(\zeta)$ совпадала почти всюду на γ с граничными значениями аналитической в области G функции $f(z)$ такой, что $f[\varphi(w)]$ принадлежит в круге $|w|<1$ классу D.*

Следствие. *Если для функции $f(\zeta)$ существует последовательность многочленов $\{\Pi_k(\zeta)\}$, удовлетворяющая* (6), *где для $\sigma(s)$ выполняется* (7) *и $\int_\gamma |f(\zeta)|^{p_1} d\sigma_1(s) < \infty$, $p_1 > 0$, то существует по-*

---

* Подробнее про класс D см., например, [5], гл. II, п. 6. 5.

следовательность многочленов $\{\tilde{\Pi}_k(\zeta)\}$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{\gamma}|f(\zeta)-\tilde{\Pi}_k(\zeta)|^{p_1}\,d\sigma_1(s)=0$.

Укажем теорему, в которой дается достаточное условие для того, чтобы аналитическая в области G функция $f(z)$ обладала тем свойством, что $f[\varphi(w)]$ принадлежит в круге $|w|<1$ классу D.

Теорема 3. *Если для функции* $f(z)$ *существует последовательность многочленов* $\{P_k(z)\}$, *равномерно сходящаяся к* $f(z)$ *внутри области* G *и такая, что* $\int\limits_{\gamma}|P_k(\zeta)|^p\rho(\zeta)\,|d\zeta|<c<\infty$, *где* $p>0$, *а* $\rho(\zeta)\geqslant 0$ — *суммируемая функция на* γ, *удовлетворяющая условию*

$$\int\limits_{\gamma}\log\rho(\zeta)\,|\psi'(\zeta)\,d\zeta|>-\infty, \tag{8}$$

то $f[\varphi(w)]$ *принадлежит классу* D*.

Из теорем 2 и 3 легко выводится теорема 4.

Теорема 4. *Если для функции* $f(z)$ *существует последовательность многочленов* $\{P_k(z)\}$, *равномерно сходящаяся к* $f(z)$ *внутри области* G *и такая, что* $\int\limits_{\gamma}|P_k(\zeta)|^p\rho(\zeta)\,|d\zeta|<c<\infty$, *где* $\rho(\zeta)$ *удовлетворяет условию* (8), *то найдется последовательность многочленов* $\{\Pi_k(\zeta)\}$ *такая, что* $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{\gamma}|f(\zeta)-\Pi_k(\zeta)|^p\rho(\zeta)\,|d\zeta|=0$.

Рассмотрим теперь вопрос о приближении в среднем многочленами граничных значений аналитических в области G функций $f(z)$, принадлежащих классу E_δ в области G. ($f(z)\in E_\delta$, если существует последовательность спрямляемых кривых $\{\gamma_n\}$, лежащих в области G и сходящихся при $n\to\infty$ к γ, такая, что $\int\limits_{\gamma_n}|f(z)|^\delta\,|dz|<c<\infty$.)

Теорема 5. *Если* $f(z)\in E_\delta$ *в области* G, *то для существования последовательности многочленов* $\{\Pi_k(\zeta)\}$ *такой, что выполняется* (6), *где* $\sigma(s)$ *удовлетворяет условию* (7) *и* $p>0$, *необходимо и достаточно, чтобы:*

I. $\int\limits_{\gamma}|f(\zeta)|^p\,d\sigma(s)<\infty$.

II. *Функция* $f(z)\sqrt[\delta]{g(z)}$ *входила в* E_δ, *где* $g(z)$ — *аналитическая в области* G *функция, определяемая формулой*

$$g(z)=\psi'(z)\exp\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+\psi(z)}{e^{i\theta}-\psi(z)}\ln|\varphi'(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

Замечание. Теорема 5 обобщает результаты В. И. Смирнова [9], которые получаются, если $p=\delta=2$ и $\sigma(s)\equiv s$. Если $\sigma(s)$ не удовлетворяет условию (7), то условие II в теореме 5 можно отбросить. Подобным же образом обобщается для любого $p>0$ теорема 2 П. П. Коровкина в работе [6].

Рассмотрим случай, когда область G удовлетворяет условию В. И. Смирнова: функция $\ln|\varphi'(w)|$ представима в круге $|w|<1$ интегралом Пуассона. Тогда $g(z)\equiv 1$, и мы получаем из теоремы 5 следствие.

Следствие. *Пусть* $f(z)\in E_\delta$ *в области* G, *удовлетворяющей условию В. И. Смирнова. Тогда для существования последователь-*

* О некоторых приложениях теоремы 3 см. [5], гл. III, п. 15.3.

ности многочленов $\{\Pi_k(\zeta)\}$ *такой, что* $\lim\limits_{k\to\infty}\int\limits_{\gamma}|f(\zeta)-\Pi_k(\zeta)|^p\,d\sigma(s)=0,$

необходимо и достаточно, чтобы $\int\limits_{\gamma}|f(\zeta)|^p\,d\sigma(s)<\infty.$

(При $\sigma(s)\equiv s$ и $p=\delta$ это было ранее доказано М. В. Келдышем (7).)

Подобные же результаты получаются при рассмотрении вопроса о приближении в среднем комплекснозначных функций $f(x)$, определенных на вещественной оси, линейными комбинациями системы $\{e^{i\alpha x}\}$, $\alpha\geqslant 0$.

Пусть $\sigma(x)$ — неубывающая функция ограниченной вариации, $-\infty<x<\infty$. Рассмотрим пространство $L^p(d\sigma;-\infty,\infty)$, $p>0$, функций $f(x)$, для которых $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,d\sigma(x)<\infty$.

Теорема Н. И. Ахиезера. *Множество функций* $\{e^{i\alpha x}\}$, $\alpha\geqslant 0$, *замкнуто в* L^p $(d\sigma;-\infty,\infty)$, $p\geqslant 1$, *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\log\sigma'(x)}{1+x^2}\,dx=-\infty. \tag{9}$$

(При $p=2$ эта теорема доказана М. Г. Крейном (8).)

В приводимой ниже теореме этот результат Н. И. Ахиезера распространяется для любого $p>0$, а также рассматривается случай, когда условие (9) не выполняется.

Теорема 6. *Пусть для* $\sigma(x)$ *выполняется* (9); *тогда для любой измеримой функций* $f(x)$, *для которой*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,d\sigma(x)<\infty, \tag{10}$$

где $p>0$ — *любое число, существует последовательность* $\{\Pi_k(e^{i\alpha x})\}$ *линейных комбинаций функций системы* $\{e^{i\alpha x}\}$, $\alpha\geqslant 0$, *такая, что*

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)-\Pi_k(e^{i\alpha x})|^p\,d\sigma(x)=0. \tag{11}$$

Если же для $\sigma(x)$ *не выполняется* (9), *то для существования последовательности* $\{\Pi_k(e^{i\alpha x})\}$, *удовлетворяющей условию* (11), *необходимо и достаточно, чтобы:*

I. *Имело место* (10).

II. *Функция* $F(e^{it})=f(\operatorname{tg}(t/2))$ *совпадала почти всюду на окружности* $|z|=1$ *с граничными значениями аналитической в круге* $|z|<1$ *функции класса* D.

Из теоремы 6 немедленно вытекает следствие, подобное следствию теоремы 2.

Владимирский государственный педагогический институт им. П. И. Лебедева-Полянского

Поступило 6 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер, ДАН, **50**, 35 (1945). [2] А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, **2**, в. 6 (1941). [3] М. Г. Крейн, ДАН, **46**, № 3 (1945). [4] Я. Л. Геронимус, ДАН, **64**, № 4 (1949). [5] И. И. Привалов, Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, 1950. [6] П. П. Коровкин, Матем. сборн., **9**, (51), 469 (1941). [7] М. В. Келдыш, ДАН, **4**, № 4 (1936). [8] М. Г. Крейн, ДАН, **46**, № 8 (1945). [9] В. И. Смирнов, Изв. АН СССР, сер. матем., **3**, 357 (1932). [10] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории аппроксимации, М., 1947.