Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

Д. Ю. ПАНОВ

ОБ УТОЧНЕНИИ ЗНАЧЕНИЙ НЕИЗВЕСТНЫХ ПРИ ПРИБЛИЖЕННО ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 19 II 1952)

1. В нашем сообщении [1] указаны формулы для приближенног определения численных значений координат узлов сетки характеристик квазилинейной гиперболической системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка и для вычисления значений искомых функций в этих узлах. Указанные формулы учитывают кривизну характеристик и члены высших порядков при определении значений искомых функций. Для уточнения найденных значений может быть использован обычно применяемый способ замены интегралов по формулам механических квадратур; при этом, однако, должны быть подобраны формулы механических квадратур соответствующей точности.

2. Используя обозначения, принятые в [1], можем написать

$$y_M = y_3 + \int_{x_3}^{x_M} \alpha\, dx = y_4 + \int_{x_4}^{x_M} \beta\, dx.$$

Заменим интегралы в этих равенствах при помощи формулы механических квадратур, приведенной в статье [2]. Предположим, что шаг сетки характеристик почти постоянен, т. е.

$$x_1 - x_3 = h_1, \quad x_M - x_1 = h_1(1 - \delta_1),$$
$$x_4 - x_2 = h_2, \quad x_2 - x_M = h_2(1 + \delta_2),$$

где квадратами δ_1 и δ_2 можно пренебрегать.

В статье [2] было показано, что в этом случае для определения δ_1 и δ_2 получаются следующие уравнения:

$$\frac{h_1}{6}(3\alpha_M + 4\alpha_1 - \alpha_3)\delta_1 + \frac{h_2}{6}(3\beta_M + 4\beta_2 - \beta_4)\delta_2 =$$
$$= y_4 - y_3 - \frac{h_1}{3}(\alpha_M + 4\alpha_1 + \alpha_3) - \frac{h_2}{3}(\beta_M + 4\beta_2 + \beta_4),$$

$$h_1\delta_1 - h_2\delta_2 = x_2 - x_1 - h_1 - h_2.$$

Когда найдены поправки δ_1 и δ_2, то могут быть определены уточненные значения координат x_M и y_M, а по ним найдены уточненные значения $u_M, v_M, \alpha_M, \beta_M$. Затем, в случае необходимости, вычисление повторяется до тех пор, пока поправки не перестанут изменять получаемые значения.

3. В случае использования гипотезы о почти равномерном шаге сетки характеристик, т. е. использования формул

$$x_1 - x_3 = h_1, \quad x_M - x_1 = h_1(\varkappa_1 + \delta_1),$$

$$x_4 - x_2 = h_2, \quad x_2 - x_M = h_2(\varkappa_2 + \delta_2),$$

где квадратами δ_1 и δ_2 можно пренебрегать, можно для приближенного вычисления интегралов вместо формулы механических квадратур, указанной выше, применять формулу

$$J = \frac{h}{6}\{y_0[S_0(\varkappa) + \delta T_0(\varkappa)] + y_1[S_1(\varkappa) + \delta T_1(\varkappa)] + \\ + y_2[S_2(\varkappa) + \delta T_2(\varkappa)]\}.$$

Здесь

$$S_0(\varkappa) = 2 + \varkappa - \varkappa^2, \qquad T_0(\varkappa) = 1 - 2\varkappa,$$

$$S_1(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa}(1+\varkappa)^3, \qquad T_1(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa^2}(2\varkappa^3 + 3\varkappa^2 - 1),$$

$$S_2(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa}(2\varkappa^2 + \varkappa - 1), \quad T_2(\varkappa) = \frac{1}{\varkappa^2}(2\varkappa^2 + 1).$$

В этом случае выражения для y_M будут иметь вид:

$$y_M = y_3 + \frac{h_1}{6}\left[\alpha_3 S_0(\varkappa_1) + \alpha_1 S_1(\varkappa_1) + \alpha_M S_2(\varkappa_1)\right] + \\ + \frac{h_1}{6}[\alpha_3 T_0(\varkappa_1) + \alpha_1 T_1(\varkappa_1) + \alpha_M T_2(\varkappa_1)]\,\delta_1,$$

$$y_M = y_4 - \frac{h_2}{6}[\beta_4 S_0(\varkappa_2) + \beta_2 S_1(\varkappa_2) + \beta_M S_2(\varkappa_2)] - \\ - \frac{h_2}{6}[\beta_4 T_0(\varkappa_2) + \beta_2 T_1(\varkappa_2) + \beta_M T_2(\varkappa_2)]\,\delta_2.$$

Исключая отсюда y_M, получим такое уравнение, связывающее δ_1 и δ_2:

$$\frac{h_1}{6}[T_2(\varkappa_1)\alpha_M + T_1(\varkappa_1)\alpha_1 + T_0(\varkappa_1)\alpha_3]\,\delta_1 + \\ + \frac{h_2}{6}[T_2(\varkappa_2)\beta_M + T_1(\varkappa_2)\beta_2 + T_0(\varkappa_2)\beta_4]\,\delta_2 = \\ = y_4 - y_3 - \frac{h_1}{6}[S_2(\varkappa_1)\alpha_M + S_1(\varkappa_1)\alpha_1 + S_0(\varkappa_1)\alpha_3] - \\ - \frac{h_2}{6}[S_2(\varkappa_2)\beta_M + S_1(\varkappa_2)\beta_2 + S_0(\varkappa_2)\beta_4].$$

При $\varkappa_1 = \varkappa_2 = 1$ оно переходит в первое из уравнений системы, приведенной выше.

Получение второго уравнения, связывающего δ_1 и δ_2, очевидно. Имеем

$$h_1\delta_1 + h_2\delta_2 = x_2 - x_1 - h_1\varkappa_1 - h_2\varkappa_2.$$

4. В случае необходимости получения еще большей точности могут быть использованы формулы механических квадратур, получаемые при интегрировании интерполяционных формул Маркова.

5. Описанный в статьях ([1,2]) и настоящем сообщении метод был применен для решения некоторых задач теории пластичности, разобранных в книге В. В. Соколовского ([3]), а также некоторых других задач. При этом было обнаружено, что хотя число вычислений для определения нужных величин в каждой точке возрастает, общее число вычислений в ряде случаев уменьшается за счет возможности укрупнения шага сетки при той же точности результата.

Институт точной механики и вычислительной механики
Академии наук СССР

Поступило
8 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Ю. Панов, ДАН, 83, № 6 (1952). [2] Д. Ю. Панов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38, 317 (1951). [3] В. В. Соколовский, Теория пластичности, изд. 2-е, 1950.