

Н. М. КОРОБОВ

НЕКОТОРЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 5 III 1952)

В работах (1, 2) содержится решение вопросов о равномерности распределения показательной функции aq^x и произведения показательной функции на полином $aq^x f(x)$. В настоящей заметке приведено несколько теорем о многомерных случаях равномерного распределения показательных функций и произведений показательных функций на полиномы.

Введем обозначения: целое $q \geq 2$; $\psi(k)$ — целочисленная функция, удовлетворяющая условию $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = \infty$; $\tau_k = q^k$; $n_k = \sum_{v=1}^k \psi(v)q^v$; m_1, m_2, \dots, m_s — произвольные целые, не равные одновременно нулю; $\varphi_1(k), \dots, \varphi_s(k)$ — любая система целочисленных функций, для которых каждая линейная комбинация $m_1\varphi_1(k) + \dots + m_s\varphi_s(k)$ имеет конечное число корней, причем $\varphi_i(k) = o(q^k)$ ($i = 1, 2, \dots, s$). Наконец, r_k — целые числа, знаки которых в системе счисления с основанием q образуют систему $\rho'_k(q)$ (см., например, (1), теорема 5).

Теорема 1. Если величины $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ заданы рядами

$$\alpha_i = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(k) r_k}{q^{\tau_k} - 1} \left(\frac{1}{q^{n_{k-1}}} - \frac{1}{q^{n_k}} \right) \quad (i = 1, 2, \dots, s; s \geq 1),$$

то система функций $\alpha_1 q^x, \dots, \alpha_s q^x$ равномерно распределена в s -мерном пространстве.

Доказательство. Пусть $\varphi(k)$ — произвольная, при достаточно большом k отличная от нуля целочисленная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(k) = o(q^k)$. Покажем сперва, что для всякого α , заданного рядом

$$\alpha = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{\varphi(v) r_v}{q^{\tau_v} - 1} \left(\frac{1}{q^{n_{v-1}}} - \frac{1}{q^{n_v}} \right), \quad (1)$$

функция αq^x равномерно распределена. Для этого оценим сумму

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} \quad (m \neq 0, \text{ целое}).$$

Выберем k из условия $n_{k-1} \leq P < n_k$. Тогда

$$P = n_{k-1} + Rq + R_1; \quad 0 \leq R \leq \psi(k) - 1; \quad 0 \leq R_1 \leq q^k - 1;$$

$$S = \sum_{v=1}^{k-1} \sum_{x=n_{v-1}+1}^{n_v} e^{2\pi i m \alpha q^x} + \sum_{x=n_{k-1}+1}^{n_{k-1}+Rq^k} e^{2\pi i m \alpha q^x} + O(q^k). \quad (2)$$

Обозначим через $S(n_{k-1}, R)$ сумму

$$S(n_{k-1}, R) = \sum_{x=1}^{Rq^k} e^{2\pi i m \alpha q^{n_{k-1}+x}}.$$

Очевидно, равенство (2) примет вид:

$$S = \sum_{v=1}^{k-1} S[n_{v-1}, \psi(v)] + S(n_{k-1}, R) + O(q^k). \quad (3)$$

Пользуясь тем, что отношение соседних членов ряда (1) стремится к нулю (это легко установить непосредственной проверкой), получим для $1 \leq x \leq Rq^k$

$$\begin{aligned} \alpha q^{n_{k-1}+x} &= q^{n_{k-1}+x} \sum_{v=1}^{k-1} \frac{\varphi(v) r_v}{q^{\tau_v-1}} \left(\frac{1}{q^{n_{v-1}}} - \frac{1}{q^{n_v}} \right) + \\ &+ q^{n_{k-1}+x} \frac{\varphi(k) r_k}{q^{\tau_k-1}} \left(\frac{1}{q^{n_{k-1}}} - \frac{1}{q^{n_k}} \right) + O\left(\frac{\varphi(k+1) r_{k+1} q^x}{(q^{\tau_{k+1}-1}) q^{\psi(k) \tau_k}} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Обозначим через M отношение

$$M = \frac{q^{\psi(v) \tau_v} - 1}{q^{\tau_v} - 1}.$$

Тогда для $v \leq k-1$

$$\frac{q^{n_{k-1}}}{q^{\tau_v} - 1} \left(\frac{1}{q^{n_{v-1}}} - \frac{1}{q^{n_v}} \right) = \frac{q^{n_{k-1}} (q^{\psi(v) \tau_v} - 1)}{(q^{\tau_v} - 1) q^{n_v}} = q^{n_{k-1} - n_v} M,$$

и, следовательно, первое слагаемое в правой части (4) есть целое число. Обозначая это целое через N и пользуясь тем, что r_{k+1} является τ_{k+1} -значным числом в системе счисления с основанием q , получим:

$$\begin{aligned} \alpha q^{n_{k-1}+x} &= N + \varphi(k) \frac{q^x r_k}{q^{\tau_k-1}} \left(1 - \frac{1}{q^{\psi(k) \tau_k}} \right) + O\left(\frac{q^x \varphi(k+1)}{q^{\tau_k \psi(k)}} \right) = \\ &= N + \varphi(k) \frac{q^x r_k}{q^{\tau_k-1}} + O\left(\frac{\varphi(k) + \varphi(k+1)}{q^{\tau_k}} \right) = \\ &= N + q^x \varphi(k) \frac{r_k}{q^{\tau_k-1}} + o\left(\frac{1}{q^{\tau_k-k}} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Отношение $\frac{r_k}{q^{\tau_k-1}}$ можно записать в виде периодической q -ичной дроби

$$\frac{r_k}{q^{\tau_k-1}} = 0, (r_k) (r_k) (r_k) \dots (r_k) \dots,$$

в которой каждый знак каждого из чисел r_k понимается как очередной знак q -ичного разложения. Выписывая подряд все знаки этого

разложения, получим

$$\frac{r_k}{q^{\tau_k} - 1} = 0, \delta_1 \delta_2 \dots \delta_{\tau_k} \delta_{\tau_k+1} \dots \quad (\delta_{\tau_k+\nu} = \delta_\nu),$$

$$\left\{ q^x \frac{r_k}{q^{\tau_k} - 1} \right\} = 0, \delta_{x+1} \dots \delta_{x+k} \delta_{x+k+1} \dots = 0, \delta_{x+1} \dots \delta_{x+k} + O\left(\frac{1}{q^k}\right).$$

Отсюда, в силу (5), следует, что

$$\alpha q^{n_{k-1}+x} \equiv \varphi(k) \cdot 0, \delta_{x+1} \dots \delta_{x+k} + O\left(\frac{\varphi(k)}{q^k}\right) \pmod{1},$$

$$S(n_{k-1}, R) = \sum_{x=1}^{Rq^k} e^{2\pi i m \alpha q^{n_{k-1}+x}} = \sum_{x=1}^{Rq^k} e^{2\pi i m \varphi(k) \cdot 0, \delta_{x+1} \dots \delta_{x+k}} + O(R\varphi(k)).$$

Но, согласно основному свойству систем $\rho'_k(q)$, сумма в правой части последнего равенства обращается в нуль, так что

$$S(n_{k-1}, R) = O(R\varphi(k)) \quad (0 \leq R \leq \psi(k) - 1). \quad (6)$$

Аналогично для $S[n_{\nu-1}, \psi(\nu)]$ будет:

$$S[n_{\nu-1}, \psi(\nu)] = S[n_{\nu-1}, \psi(\nu) - 1] + O(q^\nu) = O(\varphi(\nu) \psi(\nu) + q^\nu). \quad (7)$$

Подставляя оценки (6) и (7) в (3), получим

$$S = O\left(\sum_{\nu=1}^{k-1} \varphi(\nu) \psi(\nu) + R\varphi(k)\right) + O(q^k) = o\left(\sum_{\nu=1}^{k-1} q^\nu \psi(\nu) + q^k R\right) + O(q^k). \quad (8)$$

Пользуясь тем, что

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} \psi(\nu) q^\nu + q^k R = n_{k-1} + Rq^k = P + O(q^k), \quad q^k = o(P),$$

получим из (8) нетривиальную оценку суммы S

$$S = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i m \alpha q^x} = o(P),$$

чем доказана равномерность распределения функции αq^x .

Пусть теперь величины $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ определены согласно условию теоремы. Обозначим через α сумму $\alpha = m_1 \alpha_1 + \dots + m_s \alpha_s$ и положим $\varphi(k) = m_1 \varphi_1(k) + \dots + m_s \varphi_s(k)$. Тогда

$$\alpha = \sum_{\nu=1}^s m_\nu \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_\nu(k) r_k}{q^{\tau_k} - 1} \left(\frac{1}{q^{n_{k-1}}} - \frac{1}{q^{n_k}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(k) r_k}{q^{\tau_k} - 1} \left(\frac{1}{q^{n_{k-1}}} - \frac{1}{q^{n_k}} \right).$$

В силу условий, которым должны удовлетворять функции $\varphi_\nu(k)$ ($\nu = 1, 2, \dots, s$), для достаточно больших k будет

$$\varphi(k) \neq 0; \quad \varphi(k) = o(q^k).$$

Таким образом, α есть величина типа (1). Но тогда, по доказанному выше, функция $\alpha q^x = m_1 \alpha_1 q^x + \dots + m_s \alpha_s q^x$ равномерно распределена, и по многомерному критерию равномерного распределения система функций $\alpha_1 q^x, \dots, \alpha_s q^x$ равномерно распределена в s -мерном пространстве.

Следует отметить, что более общую задачу о равномерности распределения в s -мерном пространстве системы функций $\alpha_1 q_1^x, \dots, \alpha_s q_s^x$ для произвольных целых $q_\nu \geq 2$ ($\nu = 1, 2, \dots, s$) решить с помощью элементарного метода теоремы 1 пока не удастся. Эта общая задача имеет более сложное решение, основанное на использовании вполне равномерно распределенных функций (о вполне равномерном распределении см. (1)).

Теорема 2. Пусть $\varphi(k)$ — произвольная вполне равномерно распределенная функция и величины $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ заданы рядами

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\{\varphi(sk + \nu)\} q_\nu]}{q_\nu^k} \quad (\nu = 1, 2, \dots, s).$$

Тогда система функций $\alpha_1 q_1^x, \dots, \alpha_s q_s^x$ равномерно распределена в s -мерном пространстве.

Следующая теорема содержит достаточные условия равномерности распределения в многомерном пространстве для произведений целочисленных полиномов на показательную функцию. Введем обозначения: $p_1 < p_2 < \dots$ — произвольные простые; $\mu_k = p_1 \dots p_k$; $\delta_k = \varphi(\frac{1}{\mu_k^2})$, где φ — функция Эйлера; $\lambda_k = \mu_k \delta_k$; $\tau_k = \sum_{\nu=1}^k \lambda_\nu \psi(\nu)$; $n_{k+1} = \tau_k + h(\tau_k)$, где $\psi(k)$ и $h(k)$ — целочисленные функции, удовлетворяющие соответственно условиям $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(k)}{k} = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{h(k)}{\ln k} = \infty$, $\psi(k) > kp_{k+1}^3$. Через m_1, \dots, m_s будем, как и раньше, обозначать произвольные целые, не равные одновременно нулю.

Теорема 3. Пусть величина α задана рядом

$$\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p_k^2 q^{n_k}} \quad (q \geq 2, \text{ целое}).$$

Тогда для любых целочисленных полиномов $f_1(x), \dots, f_s(x)$, каждая линейная комбинация которых $m_1 f_1(x) + \dots + m_s f_s(x)$ отлична от константы, система функций $\alpha q^x f_1(x), \dots, \alpha q^x f_s(x)$ равномерно распределена в s -мерном пространстве.

Доказательство теоремы 2 и, особенно, теоремы 3 в основном сходно с доказательствами теорем 1 и 2 из (2). Метод доказательства каждой из теорем настоящей работы позволяет также получать оценки остаточных членов для числа попаданий дробных долей соответствующих систем функций в заданные части единичного s -мерного куба. При этом оценки, получающиеся с помощью элементарного метода теоремы 1, значительно лучше оценок, получающихся в случае теоремы 2.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
25 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. М. Коробов, Изв. АН СССР, сер. матем., 14, 215 (1950). ² Н. М. Коробов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 38, 87 (1951).