Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

ЛЮБОМИР ИЛИЕВ

ТЕОРЕМЫ О ТРИЖДЫ СИММЕТРИЧНЫХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 II 1952)

Обозначим через S_k, $k=1, 2, \ldots$, класс функции

$$f_k(z) = z + a_1^{(k)} z^{k+1} + a_2^{(k)} z^{2k+1} + \ldots, \tag{1}$$

k-симметричных, однолистных и регулярных в круге $|z| < 1$.

1. Пусть $f_3(z) \in S_3$. Используя метод В. Левина (1), легко установить (2) неравенство:

$$|a_n^{(3)}|^2 \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \frac{|a_{n-\nu}^{(3)}|^2}{3\nu - 1}, \tag{2}$$

где $a_0^{(3)} = 1$.

Как известно (3),

$$|a_2^{(k)}| \leqslant \frac{2}{k} e^{-2\frac{k-1}{k+1}} + \frac{1}{k}, \tag{3}$$

откуда находим оценку:

$$|a_2^{(3)}| \leqslant \frac{2}{3e} + \frac{1}{3} < 0{,}579. \tag{4}$$

Так как $|a_1^{(3)}| \leqslant {}^2/_3$, то из (2) и (4) получаем:

Теорема 1. *Если $f_3(z) \in S_3$, то*

$$\begin{gathered} |a_2^{(3)}| < 0{,}579, \quad |a_3^{(3)}| < 0{,}618, \quad |a_4^{(3)}| < 0{,}636, \quad |a_5^{(3)}| < 0{,}658, \\ |a_6^{(3)}| < 0{,}683, \quad |a_7^{(3)}| < 0{,}711, \quad |a_8^{(3)}| < 0{,}741, \quad |a_9^{(3)}| < 0{,}774. \end{gathered} \tag{5}$$

Менее точные оценки этих коэффициентов, кроме $a_9^{(3)}$, были указаны мною в работе (2).

2. Согласно неравенству Буняковского, для $0 \leqslant r < 1$ получаем:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r^{3\nu}}{(3\nu+1)^{1/2}} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1)^{1/2} r^{3\nu} \frac{1}{(3\nu+1)^{1/2+1/2}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1) r^{6\nu} \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{(3\nu+1)^{1+2/2}} \right\}^{1/2}. \tag{6}$$

Так как

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{(3\nu+1)^{1+{}^{2}/_{3}}} < \sum_{k=0}^{\infty} \int_{n+k}^{n+k+1} \frac{d\nu}{(3\nu+1)^{1+{}^{2}/_{3}}} = \int_{n}^{\infty} \frac{d\nu}{(3\nu+1)^{1+{}^{2}/_{3}}} = \frac{1}{2} \frac{1}{(3n+1)^{{}^{2}/_{3}}} \tag{7}$$

и

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1) r^{6\nu} = r^{6n+6} \frac{(3n+4)(1-r^6)+3r^6}{(1-r^6)^2}, \tag{8}$$

то

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r^{3\nu}}{(3\nu+1)^{{}^{1}/_{3}}} < \frac{1}{2^{{}^{1}/_{2}}} \frac{r^{3n+3}}{(3n+1)^{{}^{1}/_{3}}} \frac{\sqrt{(3n+4)(1-r^6)+3r^6}}{1-r^6}. \tag{9}$$

Воспользовавшись неравенством Гелдера, аналогично получаем:

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1)^{{}^{2}/_{3}} r^{3\nu} = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1)^{{}^{2}/_{3}} r^{2\nu} r^{\nu} \leqslant \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} (3\nu+1) r^{3\nu} \right\}^{{}^{2}/_{3}} \left\{ \sum_{\nu=n+1}^{\infty} r^{3\nu} \right\}^{{}^{1}/_{3}} =$$

$$= \left\{ r^{3n+3} \frac{(3n+4)(1-r^3)+3r^3}{(1-r^3)^2} \right\}^{{}^{2}/_{3}} \left\{ \frac{r^{3n+3}}{1-r^3} \right\}^{{}^{1}/_{3}} =$$

$$= r^{3n+3} \frac{\{(3n+4)(1-r^3)+3r^3\}^{{}^{2}/_{3}}}{(1-r^3)^{{}^{5}/_{3}}}. \tag{10}$$

3. Из известного неравенства Г. М. Голузина [4] следует [5], что если $f_k(z) \in S_k$ и $|z_1| \leqslant r$, $|z_2| \leqslant r$, $z_1 \neq z_2$, $0 \leqslant r < 1$, то

$$\left| \frac{f_k(z_1) - f_k(z_2)}{z_1 - z_2} \right| \geqslant \frac{1-r^2}{(1+r^k)^{2/k}}. \tag{11}$$

Имея в виду (11), по методу Сеге [6] получаем, что конечная сумма

$$\sigma_n^{(3)}(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + \ldots + a_n^{(3)} z^{3n+1} \tag{12}$$

для $n > 2$ однолистна в круге $|z| < \sqrt[3]{3}/2$, если

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} |a_\nu^{(3)}| (3\nu+1) r^{3\nu} < \frac{4(4-\sqrt[3]{9})}{11\sqrt[3]{11}}, \tag{13}$$

где $r^3 = {}^{3}/_{8}$.

Как показал Джо [7], для любого ν существует неравенство

$$(3\nu+1)^{{}^{1}/_{3}} |a_{3\nu+1}| < 7{,}96. \tag{14}$$

Из (5), (10) и (14) следует, что (13) будет верным, если

$$0{,}636 \cdot 13 \cdot ({}^{3}/_{8})^4 + 0{,}658 \cdot 16 \cdot ({}^{3}/_{8})^5 + 0{,}683 \cdot 19 \cdot ({}^{3}/_{8})^6 +$$

$$+ 0{,}711 \cdot 22 \cdot ({}^{3}/_{8})^7 + 0{,}741 \cdot 25 \cdot ({}^{3}/_{8})^8 + 0{,}774 \cdot 28 \cdot ({}^{3}/_{8})^9 +$$

$$+ 7{,}96 \cdot \frac{8}{5} \cdot \left(\frac{164}{5}\right)^{{}^{2}/_{3}} \left(\frac{3}{8}\right)^{10} < 0{,}312. \tag{15}$$

Так как неравенство (15) верно, а конечная сумма $\sigma_1^{(3)}(z)$ однолистна в том же круге, получаем:

Теорема 2. *Если $f_3(z) \in S_3$, конечная сумма*

$$\sigma_n^{(3)}(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + \ldots + a_n^{(3)} z^{3n+1} \tag{16}$$

при $n \neq 2$ однолистна в круге $|z| < \sqrt[3]{3}/2$, причем эта оценка точная.

Эта же теорема при $n > 3$ была нами доказана ранее [2] несколько другим методом.

Воспользовавшись методом В. Левина [8], с помощью неравенств (10) и (11) получаем:

Теорема 3. *Если $f_3(z) \in S_3$, конечная сумма*

$$\sigma_n^{(3)}(z) = z + a_1^{(3)} z^4 + \ldots + a_n^{(3)} z^{3n+1}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

однолистна в круге

$$|z| \leqslant \left\{1 - \frac{8}{3} \frac{\ln \vartheta (n+1)}{n+1}\right\}^{1/3}, \tag{18}$$

где

$$\vartheta = 7{,}96^{3/2} \cdot 3^{1/4} \cdot 2^{7/2}. \tag{19}$$

4. Пусть $f_3(z) \in S_3$ и

$$\sigma_n^{(3)} = z + a_1^{(3)} z^4 + \ldots + a_n^{(3)} z^{3n+1}. \tag{20}$$

Положим

$$f_2(z) = \sigma_n^{(3)}(z) + p_n^{(3)}(z). \tag{21}$$

Согласно теореме об искажении, если $|z| \leqslant r < 1$, то

$$\left|\frac{f_3(z)}{z}\right| \geqslant \frac{1}{(1+r^3)^{2/3}}. \tag{22}$$

Следовательно, если для $|z| \leqslant r_n < 1$ верно неравенство

$$\left|\frac{p_n^{(3)}(z)}{z}\right| < \frac{1}{(1+r_n^3)^{2/3}}, \tag{23}$$

то многочлен $\sigma_n^{(3)}(z)/z$ не может обратиться в нуль в круге $|z| \leqslant r_n$.

Неравенство (23) выполнено, если

$$\sum_{\nu=n+1}^{\infty} |a_\nu^{(3)}| r_n^{3\nu} < \frac{1}{(1+r_n^3)^{2/3}}. \tag{24}$$

(24) выполнено, согласно (14), если:

$$7{,}96 \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{r_n^{3\nu}}{(3\nu+1)^{1/3}} < \frac{1}{2^{2/3}}. \tag{25}$$

Если принять во внимание (9), последнее неравенство будет верным при $n \geqslant 1$, если

$$\frac{r_n^{3n+3}}{(3n+1)^{1/3}} \frac{\sqrt{(3n+4)(1-r_n^6)+3r_n^6}}{1-r_n^6} < \frac{1}{7{,}96 \cdot 2^{1/6}}. \tag{26}$$

Положим

$$r_n^6 = 1 - \frac{\alpha}{n+1}, \quad 0 < \alpha < n+1, \tag{27}$$

так что

$$r_n^{3n+3} = \left(1 - \frac{\alpha}{n+1}\right)^{(n+1)/2} < e^{-\alpha/2} \tag{28}$$

и

$$(3n+4)(1 - r_n^6) + 3r_n^6 < 3\alpha + 3. \tag{29}$$

Неравенство (26) выполнено, если

$$e^{-\alpha/2} \frac{\sqrt{\alpha+1}}{\alpha} (n+1)^{2/3} \leqslant \frac{2^{1/6}}{7{,}96 \cdot 3^{1/2}}. \tag{30}$$

Последнее неравенство выполнено, если

$$\alpha = {}^4/_3 \ln a (n+1), \tag{31}$$

где

$$a = 7{,}96^{3/2} \cdot 3^{3/4} \cdot 2^{1/2}. \tag{32}$$

Таким образом мы получили следующую теорему:

Теорема 4. *Если $f_3(z) \in S_3$, многочлен*

$$\frac{\sigma_n^{(3)}(z)}{z} = 1 + a_1^{(3)} z^3 + \ldots + a_n^{(3)} z^{3n}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{33}$$

не обращается в нуль в круге

$$|z| \leqslant \left\{1 - \frac{4}{3} \frac{\ln a (n+1)}{n+1}\right\}^{1/6}, \tag{34}$$

где

$$a = 7{,}96^{3/2} \cdot 3^{3/4} \cdot 2^{1/2}. \tag{35}$$

Математический институт
при Софийском университете
София, Болгария

Поступило
22 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] V. Levin, Proc. London Math. Soc., **39**, 467 (1935). [2] Л. Илиев, ДАН, **79**, 9 (1951). [3] M. Feketé and G. Szegö, Journ. London Math. Soc., **8**, 85 (1933). [4] Г. М. Голузин, Матем. сборн., **19** (61), 183 (1946). [5] Л. Илиев, ДАН, **69**, 496 (1949). [6] G. Szegö, Math. Ann., **100**, 188 (1928). [7] K. Joh, Proc. Phys. Math. Soc. of Japan, **19**, 1 (1937). [8] V. Levin, Jahresb. d. Math. Vereinigung, **42**, 68 (1939).