Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 1

МАТЕМАТИКА

М. М. ДЖРБАШЯН

О РОСТЕ ПРОИЗВОДНЫХ ПОЛИНОМОВ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 6 III 1952)

Пусть четная функция $p(x)$ определена и дифференцируема на всей оси $-\infty < x < \infty$, причем $xp'(x) \uparrow +\infty$ при $x \uparrow +\infty$. Функция $x = g(y)$, обратная к $y = p(x)$, очевидно, существует при $y \geqslant y_0 > 0$. Без ограничения общности будем считать, что функция $x = g(y)$ отлична от нуля и монотонно возрастает при $y \geqslant 1$.

Теорема. *Если для последовательности полиномов* $\{Q_n(x)\}$ *выполняется неравенство*

$$|Q_n(x)| \leqslant \exp\{p(x)\} \quad (-\infty < x < \infty; \quad n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

где $Q_n(x)$ — *полином степени* n, *то*

1) *при* $\int\limits^{\infty} p(x)\, x^{-2}\, dx < +\infty$ $\max\limits_{-R \leqslant x \leqslant R} |Q_n'(x)| \leqslant A_1(R)$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

2) *при* $\int\limits^{\infty} p(x)\, x^{-2}\, dx = +\infty$ $\max\limits_{-R \leqslant x \leqslant R} |Q_n'(x)| \leqslant A_2(R) \int\limits_1^n \frac{dy}{g(y)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$,

где $A_{1,2}(R)$ — *постоянные, зависящие только от* R.

Приведем сначала некоторые предварительные леммы.

Лемма 1. *Интегралы*

$$\int\limits^{\infty} \frac{p(x)}{x^2}\, dx, \quad \int\limits^{\infty} \frac{dy}{g(y)} \tag{2}$$

сходятся или расходятся одновременно.

Это следует из формулы

$$\int\limits_{g(1)}^{R} \frac{p(x)}{x^2}\, dx + \frac{p(R)}{R} = \frac{1}{g(1)} + \int\limits_1^{p(R)} \frac{dy}{g(y)}. \tag{3}$$

Лемма 2. *Интегралы* $a(n) \int\limits_{g(1)}^{na(n)} \frac{p(x)}{x^2}\, dx$, *где* $a(n) = \left\{\int\limits_1^{n+1} \frac{dy}{g(y)}\right\}^{-1}$, *при* $n \to \infty$ *ограничены сверху.*

Если интегралы (2) сходятся, это очевидно; в случае же их расходимости это следует из (3), если заметить, что $na(n) < g(n+1)$.

Лемма 3. *Для любых* ρ *и* R $(\rho, R > 0)$ *и для любого* x_0 $(-\infty < x_0 < \infty)$ *справедлива оценка*

$$|Q_n'(x)| \leqslant \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_0^{2\pi} \exp\left\{\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} p(R\cos\vartheta) \times \right.$$

$$\left. \times \frac{1 - |w_0|^2}{1 - 2|w_0|\cos(\vartheta - \arg w_0) + (w_0)^2}\, d\vartheta\right\} \frac{d\varphi}{|w_0|^n}, \tag{4}$$

где

$$w_0 = w_0(\rho, \varphi) = \frac{x_0 + \rho e^{i\varphi}}{R} - \sqrt{\frac{(x_0 + \rho e^{i\varphi})^2}{R^2} - 1}. \tag{5}$$

Функция

$$z = \frac{R}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right), \quad w = \frac{z}{R} - \sqrt{\frac{z^2}{R^2} - 1} \tag{6}$$

конформно отображает внешнюю часть отрезка $[-R, R]$ на круг $|w| < 1$, при этом точка $z = \infty$ переходит в точку $w = 0$.

Так как $Q_n(z)$ полином степени n, то функция

$$\varphi_n(w) = Q_n\left[\frac{R}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right)\right] w^n \tag{7}$$

голоморфна в круге $|w| \leqslant 1$ и, в силу (1),

$$|\varphi_n(e^{i\vartheta})| \leqslant \exp\{p(R\cos\vartheta)\} \quad (0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi). \tag{8}$$

По формуле Пуассона — Иенсена, в силу (5), (6) и (7), получим

$$|Q_n(x_0 + \rho e^{i\varphi})| \leqslant \frac{1}{|w_0|^n} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} p(R\cos\vartheta)\frac{1 - |w_0|^2}{1 - 2|w_0|\cos(\vartheta - \arg w_0) + |w_0|^2}\, d\vartheta\right\},$$

откуда и из $Q_n'(x_0) = \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} Q_n(x_0 + \rho e^{i\varphi})\, e^{-i\varphi}\, d\varphi$ следует (4).

Лемма 4. *Пусть $\rho < R/2$ и $|x_0| < R - \rho$; тогда*

$$1 - |w_0(\rho, \varphi)| \leqslant \frac{\rho}{R}\frac{|\sin\varphi|}{\sqrt{1 - \left(\frac{|x_0| + \rho}{R}\right)^2}}. \tag{9}$$

Образ окружности $|w| = |w_0|$ в плоскости z представляет собой эллипс $\frac{x^2}{\left[\frac{R}{2}\left(\frac{1}{|w_0|} + |w_0|\right)\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{R}{2}\left(\frac{1}{|w_0|} - |w_0|\right)\right]^2} = 1$, очевидно, проходящий через точку $x_0 + \rho e^{i\varphi}$. Замечая, что $\min\limits_{0 \leqslant r \leqslant 1}(r^{-1} + r) = 2$, и пользуясь условием прохождения этого эллипса через точку $x_0 + \rho e^{i\varphi}$, получим:

$$\frac{(|x_0| + \rho)^2}{4} + \frac{(\rho\sin\varphi)^2}{(1/|w_0| - |w_0|)^2} \geqslant \frac{R^2}{4}. \tag{10}$$

Из (10) уже следует (9)

Лемма 5. *Для любого $p > 0$ и x_0 $(-\infty < x_0 < \infty)$*

$$\overline{\lim_{R\to\infty}} |R\cos\arg w_0(\rho, \varphi) - (x_0 + \rho\cos\varphi)| \leqslant \rho|\sin\varphi| \tag{11}$$

равномерно относительно φ.

Пусть $|x_0| \leqslant A < R - \rho$; тогда справедливо разложение

$$\sqrt{\frac{(x_0 + \rho e^{i\varphi})^2}{R^2} - 1} = i\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\frac{(x_0 + \rho e^{i\varphi})^{2n}}{R^{2n}}\right\}, \tag{12}$$

где следует принять $(-1)!! = 1$. Из (12) следует, что

$$\operatorname{Re}\sqrt{\frac{(x_0 + \rho e^{i\varphi})^2}{R^2} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}\frac{\sum\limits_{k=1}^{2n} C_{2n}^k \rho^k x_0^{2n-k}\sin k\varphi}{R^{2n}}. \tag{13}$$

Из (5) и (13) получим

$$|R\cdot\mathrm{Reelle}\, w_0(\rho, \varphi) - (x_0 + \rho\cos\varphi)| \leqslant \frac{(A-\rho)^2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-3)!!}{2n!!}, \tag{14}$$

при этом ряд справа сходится. Далее из (14) имеем

$$|R\cos\arg w_0(\rho,\varphi)-(x_0+\rho\cos\varphi)|\leqslant\frac{C_1}{R}+R(1-|w_0(\rho,\varphi)|),$$

откуда и из (9) следует (11).

Доказательство теоремы. Выберем теперь

$$\rho=\left\{\int_1^{n+1}\frac{dy}{g(y)}\right\}^{-1}\quad\text{и}\quad R=n\rho;\tag{15}$$

тогда из монотонного возрастания функции $g(y)$ при $y\geqslant 1$ следует, что $R\uparrow+\infty$ при $n\uparrow+\infty$. Из оценки (9) и из (15) следует, что, независимо от того, сходятся ли интегралы (2) или нет, имеем

$$\min_{1\leqslant\varphi\leqslant 2\pi}|w_0(\rho,\varphi)|\geqslant 1-\frac{\alpha(n,|x_0|)}{n},\tag{16}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(n,|x_0|)=1$. Отсюда следует:

$$\varliminf_{n\to\infty}|w_0(\rho,\varphi)|^n\geqslant e^{-1}.\tag{17}$$

Мы покажем, что при указанном в (15) выборе R и ρ интеграл

$$I(\rho,R)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}P(R\cos\vartheta)\frac{1-|w_0|^2}{1-2|w_0|\cos(\vartheta-\arg w_0)+|w_0|^2}d\vartheta\tag{18}$$

при $n\to\infty$ остается равномерно ограниченным сверху константой, зависящей лишь от $|x_0|$. Тогда утверждения 1) и 2) теоремы будут следовать из оценки (4) и из (17), если заметить, что $\int\limits_n^{n+1}[g(y)]^{-1}dy<$ $<[g(n)]^{-1}\to 0$ при $n\to\infty$.

Из (11) следует, что равномерно относительно φ $\lim\limits_{n\to\infty}\arg w_0(\rho,\varphi)=\pi/2$ или $3\pi/2$ в зависимости от x_0 и φ. Предположим, что для данного x_0 и φ $\lim\arg w_0=\pi/2$. Пусть при $n\geqslant n_0(|x_0|)$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{16}\leqslant\arg w_0(\rho,\varphi)\leqslant\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{16};\tag{19}$$

тогда при $\vartheta\in[0,3\pi/8]$ или $[5\pi/8,2\pi]$ будем иметь $|\vartheta-\arg w_0(\rho,\varphi)|\geqslant$ $\geqslant\pi/16$. Замечая, что

$$1-2|w_0|\cos(\vartheta-\arg w_0)+|w_0|^2\geqslant 4|w_0|\sin^2\frac{\vartheta-\arg w_0}{2},\tag{20}$$

и разбивая интеграл (18) на три интеграла I_1, I_2 и I_3, распространенные, соответственно, на отрезки $[0,3\pi/8]$, $[3\pi/8,5\pi/8]$ и $[5\pi/8,2\pi]$, получим следующую оценку при $n\geqslant n_0(|x_0|)$: $I_1+I_3\leqslant\frac{(1-|w_0(\rho,\varphi)|^2)}{4|w_0(\rho,\varphi)|\sin^2(2\pi/32)}p(R)$. Замечая, что, в силу (15), $R<g(n+1)$, т. е. $p(R)<n+1$, из оценки (16) получим $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(I_1+I_3)\leqslant\frac{1}{2\sin^2(\pi/32)}$ равномерно относительно φ.

Остается оценить интеграл I_2 при $n\to\infty$. С этой целью интеграл I_2 разобьем в свою очередь на три интеграла U_1, U_2 и U_3, распространенные, соответственно, на отрезки $\Delta_1[3\pi/8,\arg w_0-1/R]$, $\Delta_2[\arg w_0-$ $-1/R,\arg w_0+1/R]$ и $\Delta_3[\arg w_0+1/R,5\pi/8]$. Очевидно, при $n\geqslant n_1(|x_0|)\geqslant n_0(|x_0|)$, в силу (11) и известного свойства ядра Пуассона, имеем: $U_2<\max\limits_{\Delta_2}p(R|\cos\vartheta|)<p(R|\cos\arg w_0|+1)<p(|x_0|)+$ $+2\rho+1)$. Следовательно, если интегралы (2) расходятся,

$$\varlimsup_{n\to\infty}U_2\leqslant p(|x_0|+1),\tag{21}$$

а при их сходимости

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, U_2 \leqslant p(|x_0| + c), \tag{21'}$$

где $c = 1 + 2\left(\int\limits_1^\infty [g(y)]^{-1} dy\right)$, равномерно по φ.

Далее, так как на отрезке $[3\pi/8, 5\pi/8]$ $|\arg w_0 - \vartheta| \leqslant 3\pi/16 < \pi/2$, то, замечая, что $|\sin\varphi| \geqslant 2|\varphi|/\pi$ при $|\varphi| \leqslant \pi/2$, из (20) имеем: $U_1 \leqslant \frac{\pi}{8|w_0|}(1 - |w_0|^2) \int\limits_{3\pi/8}^{\arg w_0 - 1/R} \frac{p(R|\cos\vartheta|)}{(\arg w_0 - \vartheta)^2} d\vartheta$, откуда, учитывая (16), после замены переменной $R(\arg w_0 - \vartheta) = t$ получим $U_1 \leqslant \frac{\pi}{4|w_0|}\alpha(|x_0|, n)\rho \times$ $\times \int\limits_1^{R(\arg w_0 - 3\pi/8)} \frac{p[R|\cos(\arg w_0 - t/R)|]}{t^2} dt$. Но $0 < \arg w_0 - 3\pi/8 \leqslant 3\pi/16 < 2/3$ в силу (19), замечая далее, что $R|\cos(\arg w_0 - t/R)| \leqslant R|\cos\arg w_0| +$ $+ t < |x_0| + 2\rho + t$ при $n \geqslant n_1(|x_0|)$, получим: $U_1 \leqslant \frac{\pi}{4|w_0|}\alpha(|x_0|, n)\rho \times$ $\times \int\limits_1^{3R/3} \frac{p(|x_0| + 2\rho + t)}{t^2} dt$.

Сделаем еще одну замену переменной $x = |x_0| + 2\rho + t$ и отметим, что при $n \geqslant n_2(|x_0|)$ $|x_0| + 2\rho + 2R/3 < R$, а также, что $\frac{x}{x - |x_0| - 2\rho} \leqslant |x_0| + 2\rho + 1$ при $x \geqslant |x_0| + 2\rho + 1$; тогда получим оценку $U_1 < \frac{\pi}{4|w_0|}(|x_0| + 2\rho + 1)^2 \alpha(|x_0|, n)\rho \int\limits_{|x_0|+2\rho+1}^{R} \frac{p(x)}{x^2} dx$. Но, в силу (15) и по лемме 2, интегралы $\rho \int\limits_{|x_0|+2\rho+1}^{R} \frac{p(x)}{x^2} dx$ при $n \to \infty$ ограничены. Итак,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, U_1 \leqslant A_1(|x_0|). \tag{22}$$

Вполне аналогично устанавливается, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, U_3 \leqslant A_2(|x_0|). \tag{22'}$$

Из (21), (22) и (22') следует $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, I_2 \leqslant A_3(|x_0|)$ равномерно относительно φ. Таким образом, равномерно относительно φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, I(\rho, R) \leqslant A_4(|x_0|)$, и теорема доказана.

Отметим, что из утверждения 1) теоремы следует*, что при $\int^\infty p(x) x^{-2} dx < +\infty$ система полиномов не полна на оси $(-\infty, +\infty)$ при приближении с весом $e^{-p(x)}$, что было установлено впервые С. Н. Бернштейном в том случае, когда $e^{p(x)}$ — четная целая функция с неотрицательными коэффициентами [1].

Сектор математики
Академии наук Арм.ССР

Поступило
22 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937. [2] С. Н. Бернштейн, ДАН, **77**, № 4 (1951). [3] С. Н. Бернштейн, ДАН, **77**, № 5 (1951).

* Утверждаемое автором следствие в его общей форме доказано было мною в заметке [3] (теорема 4). *Акад. С. Бернштейн*