

Член-корреспондент АН СССР А. О. ГЕЛЬФОНД

ОБ ОДНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ЗАДАЧЕ

В моей книге «Исчисление конечных разностей»⁽¹⁾ в § 5 главы I рассмотрен общий интерполяционный процесс при треугольной таблице узлов интерполяции. В настоящей заметке имеется в виду дать обобщения и уточнения теорем этого параграфа книги.

Пусть задана бесконечная треугольная таблица чисел

$$x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{n,n}; \quad n = 0, 1, \dots; \quad |x_{k,s}| \leq r_n; \quad 0 \leq k \leq s; \quad (1)$$

$$0 \leq s \leq n; \quad \theta = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} \right)^{n-1}, \quad \theta_0 \geq \left(\frac{r_{n-1}}{r_n} \right)^{n-1}; \quad n \geq n_0.$$

Пусть, как обычно принято, $[x_{0,n}, x_{1,n}, \dots, x_{n,n}]$ будет разделенная разность целой функции $f(z)$ с узлами интерполяции $x_{0,n}, \dots, x_{n,n}$; $M(r)$ будет максимумом модуля $f(z)$, $|z| = r$. Введем обозначения

$$n! \int_0^{t_1} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} f(t_{1,n}, \dots, t_{n,n}) dt_{1,n} \dots dt_{n,n} = \int_n F(t) dt_n, \quad (2)$$

$$\xi_n = x_{0,n} + \sum_{k=1}^n (x_{k,n} - x_{k-1,n}) t_k, \quad 1 \geq t_1 \geq \dots \geq t_n,$$

и ПОЛОЖИМ

$$R_n(z) = \int_1 \dots \int_n \int_{\xi_0}^z \int_{\xi_1}^{z_1} \dots \int_{\xi_n}^{z_n} f^{(n+1)}(z_{n+1}) dz_1 \dots dz_{n+1} dt_1 \dots dt_n,$$

$$\frac{1}{n!} P_n(z) = \int_1 \dots \int_n \int_{\xi_0}^z \dots \int_{\xi_{n-1}}^{z_{n-1}} dz_1 \dots dz_n dt_1 \dots dt_n, \quad (3)$$

$$Q_n(z) = \int_{\xi_0}^z \dots \int_{\xi_{n-1}}^{z_{n-1}} dz_1 \dots dz_n, \quad Q_0(z) = 1.$$

В⁽¹⁾ показано, что при известных условиях имеет место представление

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [x_{0,n}, \dots, x_{n,n}] P_n(z), \quad (4)$$

причем этот ряд является интерполяционным рядом, так как раздельная разность $[x_{0,n}, \dots, x_{n,n}]$ для $P_k(z)$ равна 1 при $n=k$ и нулю в остальных случаях.

Нетрудно видеть, как показано также в (1), что имеет место тождество

$$f(z) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} [x_{0,k}, \dots, x_{k,k}] P_k(z) + R_n(z) \quad (5)$$

(см. формулу (69) (1)). Поэтому для доказательства сходимости к $f(z)$ ряда (4) достаточно доказать стремление к нулю $R_n(z)$ с ростом n . Для дальнейшего нам понадобятся вспомогательные предложения, которые мы и приведем.

Лемма 1. Величина $Q_n(z)$ удовлетворяет неравенству

$$|Q_n(z)| < C(\rho) \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} r_{n-1} \right)^n, \quad |z| = \rho, \quad \theta_1 > \theta,$$

или $\theta_1 = \theta_0$, а $C(\rho)$ не зависит от n .

Действительно, на основании формулы (71) (1), которая легко получается последовательным интегрированием, мы имеем соотношение

$$-Q_p(z) = -\frac{z^p}{p!} + \frac{\xi_0^p}{p!} Q_0(z) + \dots + \frac{\xi_{p-2}^2}{2!} Q_{p-2}(z) + \xi_{p-1} Q_{p-1}(z). \quad (6)$$

Но $|\xi_k| \leq r_k$, так как ξ_k не выходит за пределы наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего точки $x_{0,n}, \dots, x_{n,n}$. Поэтому из соотношения (6) следует неравенство

$$|Q_p(z)| \leq \frac{\rho^p}{p!} + \frac{\rho^p}{p!} (|Q_0(z)| + \dots + \frac{r_{p-2}^2}{2!} |Q_{p-2}(z)| + r_{p-1} |Q_{p-1}(z)|), \quad (7)$$

где $\rho = |z|$. Допустим теперь, что неравенство $|Q_k(z)| < C_{p-1} \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} r_{k-1} \right)^k$, $C_{p-1} = C_{p-1}(\rho) \geq 1$ и не зависит от k , верно при всех $k \leq p-1$. Тогда из неравенства (7) мы получаем неравенство

$$\begin{aligned} |Q_p(z)| &\leq \frac{\rho^p}{p!} + C_{p-1} \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} r_{p-1} \right)^p \left[\frac{\theta_1^{-p} \ln^p 2}{p!} \left(\frac{r_0}{r_{p-1}} \right)^p + \right. \\ &\quad \left. + \theta_1^{-2} \frac{r_{p-2}^2 r_{p-3}^{p-2} \ln^2 2}{r_{p-1}^p 2!} + \theta_1^{-1} \left(\frac{r_{p-2}}{r_{p-1}} \right)^{p-1} \ln 2 \right] < \\ &< \frac{\rho^p}{p!} + C_{p-1} \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} r_{p-1} \right)^p \left[\sum_0^{\infty} \frac{\ln^k 2}{k!} - 1 + \frac{1}{p^2} \right] < \\ &< C_{p-1} \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} r_{p-1} \right)^p \left[1 + \frac{1}{p^2} + \left(\frac{\rho \ln 2}{\theta r_{p-1}} \right)^p \frac{1}{p!} \right] = C_p \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} r_{p-1} \right)^p, \end{aligned} \quad (8)$$

верное при $p \geq p_0(\theta_1)$, так как при $p-1 \geq k \geq k_0$

$$\frac{r_k^{p-k} r_{k-1}^k}{r_{p-1}^p} = \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right)^k \left(\frac{r_k}{r_{p-1}} \right)^p = \left(\frac{r_{k-1}}{r_k} \right)^k \left(\frac{r_k}{r_{k+1}} \right)^p \dots \left(\frac{r_{p-2}}{r_{p-1}} \right)^p < \theta_1^{p-k}.$$

Неравенство (8) доказывает нашу лемму, так как из него следует, что $C_p < C(\rho)$ для любого p .

Из леммы 1 непосредственно следует оценка для $|P_n(z)|$. Действительно, так как $\left| \int_n F(t) dt \right| \leq \max_{t \in D} |F(t)|$, где D — область изменения t , мы будем иметь неравенство

$$\frac{|P_n(z)|}{n!} \leq \max |Q_n(z)| < C \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} r_{n-1} \right)^n, \quad (9)$$

где попрежнему $C = C(\rho)$ и $\theta_1 > \theta$ или $\theta = \theta_0$.

Положим теперь

$$f_{k,n}(z) = \int_0^z \int_0^{z_1} \cdots \int_0^{z_{k-1}} f^{(n)}(z_k) dz_1 \cdots dz_k, \quad k \leq n. \quad (10)$$

Тогда, если $f(z)$ — целая функция и $M_k(r)$ — максимум модуля $f^{(k)}(z)$ при $|z| \leq r$, мы будем иметь, очевидно, неравенство

$$\begin{aligned} |f_{k,n}(z)| &< \left| \int_0^r \int_0^{t_1} \cdots \int_0^{t_{k-1}} |f^{(n)}(z_k)| dt_1 \cdots dt_k \right| < \\ &< M_n(r) \int_0^r \cdots \int_0^{t_{k-1}} dt_1 \cdots dt_k = \frac{r^k}{k!} M_n(r), \quad |z| = r. \end{aligned} \quad (11)$$

Лемма 2. Для $|R_n(z)|$ имеет место неравенство

$$|R_n(z)| < \varepsilon_n(\rho) + C_1 \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} r_n \right)^{n+1} M_{n+1}(r_n), \quad (12)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(\rho) = 0$ и C_1 не зависит от n .

Действительно, последовательно интегрируя, мы получаем, что

$$\begin{aligned} R_n(z) &= \int_1 \cdots \int_n \int_{\xi_0}^{z_{n-1}} \cdots \int_{\xi_{n-1}}^{z_n} f_{1,n+1}(z_n) dz_1 \cdots dz_n dt_1 \cdots dt_{n-1} - \\ &- \frac{P_n(z)}{n!} \int_n f_{1,n+1}(\xi_n) dt = f_{n+1,n+1}(z) - \sum_{k=1}^n \frac{P_k(z)}{k!} \int_k f_{n-k+1,n+1}(\xi_k) dt_k. \end{aligned} \quad (13)$$

Воспользовавшись неравенствами (9), (11) и тем, что $|\xi_k| \leq r_k$, мы получаем отсюда неравенство

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &< \frac{\rho^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(\rho) + C \sum_{k=1}^n \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} r_{k-1} \right)^k \frac{r_k^{n-k+1}}{(n-k+1)!} M_{n+1}(r_k) < \\ &< \varepsilon_n(\rho) + C_1 r_n^{n+1} \left(\frac{\theta_1}{\ln 2} \right)^{n+1} M_{n+1}(r_n), \quad |z| = \rho, \end{aligned} \quad (14)$$

где $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n(\rho) = 0$, так как $f(z)$ — целая функция и $C_1 = C_1(\rho)$ не зависит от n .

Из неравенства (12) следуют теоремы:

Теорема 1. Пусть $f(z)$ будет целой функцией с максимумом модуля $M(r)$, а все узлы треугольной таблицы (1) не выходят за пределы круга $|z| = \sigma$, другими словами, $r_k \leq \sigma$, $k = 0, 1, \dots$. Тогда, если выполняется неравенство

$$M(r) < r^{-1/\sigma} 2^{r/\sigma}, \quad r > r_0(\varepsilon), \quad (15)$$

где $\varepsilon > 0$ фиксировано, то ряд (4) равномерно сходится к $f(z)$ в любой конечной части плоскости z .

Действительно, из интегрального представления

$$M_{n+1}(\rho) = \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_{|z|=R} \frac{f(z) dz}{(z-t)^{n+2}}, \quad |t| = \rho < R, \quad (16)$$

и неравенства (15) при $R = \frac{\sigma}{\ln 2} n$ и $n \geq n_0(\rho, \varepsilon)$ следует неравенство

$$M_{n+1}(\rho) < C_2 n^{n+1} e^{-n} \sqrt{n} (\sigma n)^{-1/2-\varepsilon} \frac{e^n}{n^{n+1}} \left(\frac{\ln 2}{\sigma}\right)^n < C_3 n^{-\varepsilon} \left(\frac{\ln 2}{\sigma}\right)^n, \\ C_3 = C_3(\rho). \quad (17)$$

Но в нашем случае r_n в неравенстве (12) можно заменить величиной σ , а $\theta_1 = 1$, так как $r_{n-1}/r_n \leq 1$. Поэтому мы приходим к равенству

$$|R_n(z)| < \varepsilon_n(\rho) + C_4 \left(\frac{\sigma}{\ln 2}\right)^n \left(\frac{\ln 2}{\sigma}\right)^n n^{-\varepsilon} < C_5 n^{-\varepsilon} + \varepsilon_n(\rho), \quad (18)$$

которое и доказывает нашу теорему, так как $C_5 = C_5(\rho)$ не зависит от n .

Доказанная теорема является уточнением теоремы в (1) на стр. 67, которая в (1) осталась недоказанной, так как формула (83) в (1) не обоснована.

Теорема 2. Пусть $f(z)$ будет целой функцией с максимумом модуля $M(r)$, а узлы интерполяции и число θ , связанное с ними, определяются таблицей (1), причем $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = \infty$. Определим функцию плотности чисел таблицы $N(r)$, положив $N(r) = \sum_{r_k < r} 1$. Тогда, если при каких-нибудь фиксированных λ и ε , $\lambda < \ln \frac{e}{\theta}$ и $\varepsilon > 0$, выполняется неравенство

$$\ln M \left[\frac{1}{\ln 2} r N(r) \right] < \lambda N[(1-\varepsilon)r], \quad r > r_0, \quad (19)$$

то ряд (4) равномерно сходится к $f(z)$ в любой конечной части плоскости z .

Доказательство. Из формулы (16), полагая в ней $\rho = r_n$, $R = \frac{1}{\ln 2} r_n N(r_n)$, мы получаем непосредственно неравенство

$$M_{n+1}(r_n) < C_6 n^{n+1} e^{-n} \sqrt{n} e^{\lambda n} \left(\frac{1}{\ln 2} r_n\right)^{-n-1} < n (\ln 2 e^{\lambda-1})^n r_n^{-n-1}, \quad (20)$$

верное при $n > n_0$. Но воспользовавшись неравенством (12), мы теперь получаем, что

$$|R_n(z)| < \varepsilon_n(\rho) + C_1 n (\theta_1 e^{\lambda-1})^{n+1},$$

откуда и следует наша теорема, так как $\theta_1 > 0$ может быть взято меньшим, чем $e^{1-\lambda} > \theta$.

Доказанная теорема в некоторых случаях, например, при $x_{0,n} = \dots = x_{n,n} = (-1)^n n^\alpha$, $\alpha > 0$, дает более точный результат, чем результат В. Л. Гончарова, получающийся в этом случае из теоремы 2 (1).

Поступило
5 IV 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, 1952.