Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

С. С. КАЛИНОВСКАЯ

О СХОДИМОСТИ УКЛОНЕНИЙ ОТ ПОЛИНОМОВ СРЕДНИХ СТЕПЕННЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ К НАИЛУЧШИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 31 III 1952)

В случае одномерной задачи аппроксимации на заданном сегменте быстрота сходимости уклонений от полиномов средних степенных приближений к наилучшим приближениям была изучена Е. Я. Ремезом [1], который пришел к этому вопросу в связи с разработкой предложенного им вычислительного метода для определения наилучших равномерных приближений с помощью средних степенных. Полученные им основные результаты и самый метод исследования допускают более или менее прямое обобщение и для соответствующих задач в многомерных пространствах. Но при этом уже в двумерном пространстве введение в рассмотрение случая области аппроксимации $\mathfrak{A}$ с контуром, заключающим (неалгебраические) точки заострения, обнаруживает существенную роль нового фактора, каким является, так сказать, степень разрежения точечного множества $\mathfrak{A}$ в тех его точках, где определяемая обычным образом плотность по лебеговой мере равна нулю. Настоящее сообщение содержит некоторые результаты исследований, проведенных с учетом этого нового фактора.

1°. Пусть, более общим образом, на L-измеримом множестве E положительной конечной меры μE в пространстве R_n заданы $\overline{p+1}$ равномерно непрерывных и метрически линейно независимых [2] на E функций точки $v_i(x)$, $i=0, 1, \ldots, p$. Если каждая из этих функций принадлежит L^m при данном $m>1$, то возможна постановка задачи среднего степенного приближения, заключающаяся в отыскании величины

$$E_p^{(m)} = \min_{c_i} \delta_m [\Phi], \tag{1}$$

где

$$\delta_m [\Phi] = \delta_m \left[v_0(x) + \sum_{i=1}^{p} c_i v_i(x) \right] = \left[\frac{1}{\mu E} \int_E |\Phi(x)|^m d\mu \right]^{1/m}.$$

Если предположить, что множество E ограничено, то приобретает смысл также и задача Чебышева минимизации по c_i выражения

$$\delta_0 [\Phi] = \sup_{x \in E} |\Phi(x)| = \sup_{x \in E} \left| v_0(x) + \sum_{i=1}^{p} c_i v_i(x) \right|, \tag{2}$$

ибо в этом случае функции $v_i(x)$ ограничены на E.

Так как интеграл Лебега не учитывает множеств меры нуль, то изучать сходимость уклонений от полиномов средних степенных приближений к наилучшим приближениям достаточно на приведенных множествах [3]. Из одной общей теоремы Е. Я. Ремеза [2] вытекает следующий факт:

Если множество E приведенное, то для непрерывных на E обобщенных полиномов выполняется соотношение:

$$\lim_{m\to\infty} \delta_0[\Phi_m] = \delta_0[\Phi_0],$$

где $\Phi_m(x)$ и $\Phi_0(x)$ обозначают, соответственно, единственное решение задачи (1) *и (не обязательно единственное) решение чебышевской задачи* (2).

2°. Положим

$$E_p^{(0)} = \delta_0[\Phi_0] = \rho, \quad \delta_0[\Phi_m] = \rho_m = \rho(1+2\alpha_m),$$

причем тривиальный случай $\rho = 0$ можем не рассматривать.

Мы ставим себе целью исследовать α_m при $m \to \infty$.

3°. Пусть, вообще, $S(x; r)$ обозначает n-мерную сферу с центром в точке x и радиусом r. Функцию

$$\psi(h) = \inf_{\substack{x \in \overline{E} \\ h_0 > r \geqslant h}} \frac{\mu[E \cdot S(x; r)]}{\mu S(x; r)},$$

где $h_0 > 0$ произвольное, но фиксированное, назовем **модулем концентрации** множества E.

Отметим, что функция $\frac{\mu[E \cdot S(x; r)]}{\mu S(x; r)}$ непрерывна по x и по r, а функция $\psi(h)$ непрерывна и монотонна в интервале $(0, h_0)$.

Множества, для которых $\psi(h) > 0$ при $h > 0$ или же $\psi(h) \geqslant \text{const} > 0$, назовем, соответственно, квази-равномерно и равномерно концентрированными.

Теорема. *Совокупность квази-равномерно концентрированных множеств конечной меры совпадает с совокупностью ограниченных приведенных множеств.*

Скажем, что квази-равномерно концентрированное множество E принадлежит к классу, характеризуемому положительной неубывающей функцией $\underline{\psi}(h)$, или, короче, «к классу $\underline{\psi}(h)$», если для h, меньших некоторого $\overline{h}_0$, выполняется условие

$$\psi(h) \geqslant A\underline{\psi}(h), \quad A = \text{const}. \tag{3}$$

Как видно из определения $\psi(h)$, наличие хотя бы одной «плохой» точки относит множество E к классу с быстро убывающей (при $h \to 0$) функцией $\underline{\psi}(h)$.

Легко построить примеры квази-равномерно концентрированных множеств, принадлежащих к классам различных $\underline{\psi}(h)$ (например, $\underline{\psi}(h) = h^t$, $t = \text{const} \geqslant 0$, $\underline{\psi}(h) = e^{-t_1/h^i}$, t_1, $i = \text{const} > 0$, и т. д.). Так, все плоские области, ограниченные замкнутыми **алгебраическими** кривыми (или суммой конечного числа таких кривых), можно отнести к классу, характеризуемому функцией $\underline{\psi}(h) = h^t$, где $t = \text{const} \geqslant 0$, а комбинируя конечное число **аналитических** кривых, можно уже получить бесконечную шкалу существенно различных функций $\underline{\psi}(h)$. Например, для плоской области, заключенной между кривой $y = \frac{d}{dx}(x^2 e^{-t_1/h^i})$, осью абсцисс и прямой $x = \text{const} > 0$, будем иметь $\underline{\psi}(h) = e^{-t_1/h^i}$.

Легко видеть, что если множество E принадлежит к некоторому классу $\underline{\psi}(h)$, то его замыкание $\overline{E}$ принадлежит к тому же классу. Если при этом $\mu(\overline{E}-E)=0$, то верно и обратное утверждение.

4°. Пусть модули непрерывности* функций $v_i(x)$, $i=0, 1, \ldots, p$, удовлетворяют условию

$$\omega(h) \leqslant K\overline{\omega}(h), \tag{4}$$

где $K=\text{const}>0$, $\overline{\omega}(h)$ — данная непрерывная, возрастающая на некотором сегменте $[0, \delta]$ (δ — малое, но фиксированное число), вогнутая** функция, и пусть функции $v_i(x)$ рассматриваются на множестве E, принадлежащем к некоторому классу $\underline{\psi}(h)$.

При наших условиях модули непрерывности всех Φ_m удовлетворяют неравенству (4) с той же функцией $\overline{\omega}(h)$ и с некоторым не зависящим от m коэффициентом k [1].

Для каждого $m>1$ можно найти такую точку $x_m \in E$, что

$$|\Phi_m(x_m)| > \rho(1+{}^3/_2\alpha_m),$$

и такое $h>0$, чтобы для $x \in \Delta_m \equiv [E \cdot S(x_m; h)]$ было

$$|\Phi_m(x)-\Phi_m(x_m)| \leqslant k\overline{\omega}(h) = \frac{\rho\alpha_m}{2}. \tag{5}$$

Тогда для $x \in \Delta_m$ выполняется также условие

$$|\Phi_m(x)| > \rho(1+\alpha_m). \tag{6}$$

Исходя из неравенства

$$\delta_m[\Phi_m] \leqslant \delta_m[\Phi_0],$$

получаем

$$\rho^m \geqslant \frac{1}{\mu E}\int_E |\Phi_m|^m d\mu \geqslant \frac{1}{\mu E}\int_{\Delta_m} |\Phi_m|^m d\mu \geqslant \frac{\mu[E \cdot S(x_m, h)]}{\mu E}\rho^m(1+\alpha_m)^m,$$

откуда

$$(1+\alpha_m)^m \leqslant \frac{\mu E}{\mu[E \cdot S(x_m; h)]} \leqslant \frac{\mu E}{A\underline{\psi}(h) \cdot \mu S(x_m; h)} = \frac{C}{\underline{\psi}(h)\,h^n}, \tag{7}$$

где $C=C(A, n)=\text{const}$.

Подставляя в (7) значение $h=\overline{\omega}^{-1}\left(\frac{\alpha_m\rho}{2k}\right)$ из (5), получаем уравнение

$$(1+\overline{\alpha}_m)^m \, \underline{\psi}\left[\overline{\omega}^{-1}\left(\frac{\overline{\alpha}_m\rho}{2k}\right)\right]\left[\overline{\omega}^{-1}\left(\frac{\overline{\alpha}_m\rho}{2k}\right)\right]^n = C,$$

---

* Модуль непрерывности $\omega(h)$ для функции n переменных $f(x)$ определяем следующим образом:

$$\omega(h) = \max_{r(x', x'') \leqslant h} |f(x')-f(x'')|,$$

где

$$x \equiv (x_1, \ldots, x_n), \quad r(x', x'') = \left[\sum_{i=1}^{n}(x_i'-x_i'')^2\right]^{1/2}.$$

** Вогнутость функции определяется аналогично выпуклости с соответствующим изменением смысла определяющих неравенств [4].

которое при $m>0$ имеет единственное решение $\overline{\alpha}_m = \varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m)^\rho$, зависящее также от k, ρ, A и n; при этом $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m) = 0$. Это решение дает оценку сверху интересующей нас величины α_m:

$$\overline{\alpha}_m = O[\varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m)].$$

От размерности пространства R_n функция $\varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m)$ зависит в очень малой степени.

Отметим, что при любых $\underline{\psi}(h)$ и $\overline{\omega}(h)$ $\varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m) > \frac{1}{m}$. При фиксировании $\overline{\omega}(h)$ функция $\varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m)$ однозначно определяется функцией $\underline{\psi}(h)$; при этом, чем быстрее $\underline{\psi}(h)$ стремится к нулю при $h\to 0$, тем медленнее убывает $\varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m)$ при $m\to\infty$.

Следует заметить, что каждой функции $\varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m)$ соответствует не одна, а бесконечно много функций $\underline{\psi}(h)$. Так например, для всех $\underline{\psi}(h)$, удовлетворяющих условию вида

$$\underline{\psi}(h) \geqslant h^t, \quad t = \text{const} \geqslant 0,$$

функция $\varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m)$ одна и та же (такая, как для n-мерного сегмента).

5°. В общем случае оценку $\overline{\alpha}_m = O[\varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m)]$ улучшить нельзя. Действительно, всегда оказывается возможным найти множество E, принадлежащее к данному классу $\underline{\psi}(h)$, и построить на нем функции $v_i(x)$ из данного класса (4) так, чтобы уже порядок самого α_m, а не только его верхней границы $\overline{\alpha}_m$, совпадал с порядком функции $\varphi_{\underline{\psi}, \overline{\omega}}(m)$.

В заключение приведем таблицу порядков $\overline{\alpha}_m$ для некоторых функций $\underline{\psi}(h)$ и $\overline{\omega}(h)$:

$\overline{\omega}(h)$	$\underline{\psi}(h)$: $\underline{\psi}_0(h) = h^t$, $t = \text{const} \geqslant 0$	$\underline{\psi}_1(h) = e^{-t_1/h^l}$, $t_1,\ l = \text{const} > 0$	$\underline{\psi}_2(h) = e^{-t_2/\underline{\psi}_1(h)}$, $t_2 = \text{const} > 0$	$\ldots$	$\underline{\psi}_{\nu+1}(h) = e^{-t_{\nu+1}/\underline{\psi}_\nu(h)}$, $t_{\nu+1} = \text{const} > 0$
	Порядок $\overline{\alpha}_m$				
h^τ, $0<\tau\leqslant 1$	$\frac{\log m}{m}$	$\frac{1}{m^{\tau/(l+\tau)}}$	$\frac{1}{(\log m)^{\tau/l}}$	$\ldots$	$\frac{1}{(\underbrace{\log\ldots\log}_{\nu} m)^{\tau/l}}$
$\frac{1}{\left(\log\frac{1}{h}\right)^\varkappa}$, $\varkappa>0$	$\frac{1}{m^{\varkappa/(1+\varkappa)}}$	$\frac{1}{(\log m)^\varkappa}$	$\frac{1}{(\log\log m)^\varkappa}$	$\ldots$	$\frac{1}{(\underbrace{\log\ldots\log}_{\nu+1} m)^\varkappa}$
$\frac{1}{\underbrace{\log\ldots\log}_{s}\frac{1}{h}}$	$\frac{1}{\underbrace{\log\ldots\log}_{s-1} m}$	$\frac{1}{\underbrace{\log\ldots\log}_{s} m}$	$\frac{1}{\underbrace{\log\ldots\log}_{s+1} m}$	$\ldots$	$\frac{1}{\underbrace{\log\ldots\log}_{s+\nu} m}$

Поступило
25 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Е. Я. Ремез, Збірник праць Інст. математики АН УРСР, 10 (1948). [2] Е. Я. Ремез, ДАН, **60**, № 2 (1948). [3] Н. Н. Лузин, О строении измеримых множеств, Прибавление III к кн. А. Лебега Интегрирование и отыскание примитивных функций, 1934, стр. 290—297. [4] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1939, стр. 73—75.